TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)

NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

GIẢI TÍCH – ĐẠI SỐ TỔ HỢP

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ năm có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

32-2009/CXB/119-16/GD Mã số : PTK44t9 - LKT

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số

2. Lượng giác

3. Hình học không gian

4. Hình học giải tích

5. Giải tích - Đại số tổ hợp

6. Khảo sát hàm số

7. Bất đẳng thức

Tập sách **"Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Giải tích - Đại số tổ hợp"** này, gồm 3 phần :

Phần I : Giải tích : có 3 chương

Phần II : Đại số tổ hợp - Xác suất : có 2 chương.

Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§). Mỗi (§) được biên soạn thống nhất gồm các mục :

A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.

B. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ, có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng.

Cuối chương có phần Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần III : Ôn tập – Hướng dẫn giải – đáp số : Phần này gồm ôn tập tổng hợp (Bài tập tự luận và bài tập trắc nghiệm) và hướng dẫn giải bài tập hoặc cho đáp số của phần luyện tập ở mỗi (§) ; giúp học sinh tự kiểm tra, đánh giá kết quả giải bài tập của minh.

Cuối sách có phần phụ lục : **Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2008)**. Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đã ra từ 2005 đến 2008 – môn Toán, có liên quan đến phần Giải tích - Đại số tổ hợp, có hướng dẫn giải ; giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh Đại học.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12, bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học.** Chúng tôi tin tưởng bộ sách này, sẽ góp phần giúp các em học sinh 12, nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mĩ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS, TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

– Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.

– Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

– Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;

– Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

– Tìm giới hạn

– Tìm nguyên hàm, tính tích phân

– Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tổng hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, elip, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố liên quan.

– Sự tiếp xúc của hai đường cong.

– Hệ phương trình mũ và lôgarit.

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Phần I.

GIẢI TÍCH

Chương 1.

GIỚI HẠN HÀM SỐ – HÀM SỐ LIÊN TỤC

§ 1. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tính chất cơ bản :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [kf(x)] = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $(k \in \mathbf{R})$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ $(g(x) \neq 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0)$

e) Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

f) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ và $\lim\limits_{y \to \alpha} g(y) = \beta$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g[f(x)] = \beta$

2. Các giới hạn thông dụng :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

b) Nếu a < 1 thì : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

Nếu 0 < a < 1 thì : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Khử các dạng vô định :

Các dạng vô định thường gặp là : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$

Để khử các dạng vô định ta thường dùng các kĩ thuật sau :

– Phân tích ra thừa số.

– Dùng lượng liên hiệp.

– Biến đổi về các giới hạn mà ta đã biết cách tính.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}(a\neq 0)$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right]$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^2-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+4}{x+5}=\frac{8}{9}$;

d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}}=\frac{1}{n.a^{n-1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}=-1\ ;$$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{(x-2)(x-4)}=0\ ;$$

Ví dụ 2 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-x+5}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4+5x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x-3)(1+3x)}{(2x+1)^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{x^2+4x-2}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4+5x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x-3)(1+3x)}{(2x+1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x.2x.3x}{(2x)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3}{8x^3}=\dfrac{3}{4}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{x^2+4x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}2x=\infty$.

Ví dụ 3 :

a) Cho $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$;

b) cho $g(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\le 2\\ x^2+1 \text{ khi } x>2\end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Ta có : $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+1) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5.$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5.$

Ví dụ 4 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \alpha} \frac{x\sqrt{x}-\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ $(\alpha \ge 0)$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$;

d) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}$ $(x > 0)$;

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Hướng dẫn giải

a) $$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-(x^2+x+1)}{x\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right]}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}} = 0 \text{ ;}$$

b) $$\lim\limits_{x\to \alpha} \frac{x\sqrt{x}-\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}} = \lim\limits_{x\to \alpha} \frac{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{\alpha})^3}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}} = \lim\limits_{x\to \alpha}\left[(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}.\sqrt{\alpha}+(\sqrt{\alpha})^2\right]$$

$$= 3(\sqrt{\alpha})^2 = 3\alpha$$

c) $$\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(3x-2)^2-(4x^2-x-2)}{(x-1)(x-2)\left[3x-2+\sqrt{4x^2-x-2}\right]}$$

$$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2-11x+6}{(x-1)(x-2)\left[3x-2+\sqrt{4x^2-x-2}\right]}$$

$$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{5(x-\frac{6}{5})}{(x-2)\left[3x-2+\sqrt{4x^2-x-2}\right]} = \frac{1}{2} \text{ ;}$$

d) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x+t-x}{t(\sqrt{x+t}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+t}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\frac{9}{8};$$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\right]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 5 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3})$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{1+14x+\sqrt{16x^2+x+1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-x)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{x^2-x+1})$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+x^2-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+x}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}=\dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(5-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

Suy ra rằng :

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(5-\frac{2}{x})}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = -\frac{5}{2}.$$

c) Ta có : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

Ta lại có : $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = +\infty$$

d) Ta có : $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{1+14x+\sqrt{16x^2+x+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{x\left(\frac{1}{x}+14+\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{7}{14+4} = \frac{7}{18};$$

Ta lại có : $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{1+14x+\sqrt{16x^2+x+1}} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{7x}{x\left(\frac{1}{x} + 14 - \sqrt{16 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{7}{14 - 4} = \frac{7}{10}.$$

e) $\lim_{x \to \infty} x^2(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 \frac{(x^3 + 1) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x.\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2}$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

f) $\lim_{x \to -\infty} (3x - \sqrt{x^2 - x + 1}) = -\infty$

Ta lại có : $\lim_{x \to +\infty} (3x - \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2 - (x^2 - x + 1)}{3x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{8x^2 + x - 1}{3x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(8 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(3 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

Ví dụ 6 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 8x}\right)$;

b) $\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}\right]$;

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$;

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$;

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$;

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 - 3x + 1}}{x - 1 + \sqrt[3]{4x^6 + 3x - 2}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 8x}\right) = -\infty$

(Vì $\sqrt[3]{x^3+5x^2} \to -\infty$, $\sqrt[3]{x^3+8x^2} \to +\infty$)

Ta lại có : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^2+8x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+5x^2-(x^3+8x)}{\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+5x^2}.\sqrt[3]{x^2+8x} + \left(\sqrt[3]{x^2+8x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{5}{x}}.\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}} + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x = +\infty;$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right]$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^{\frac{4}{3}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right]}$$

$= 0$. (Vì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 0$)

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[3]{x^3}\right) + \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{(x^3+3x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3}.\sqrt[3]{x^3+3x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2} + \frac{x^2-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left\{\frac{3x^2}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} + 1\right]} + \frac{2x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}\right\}$$

$$= \frac{3}{1+1+1} + \frac{2}{1+1} = 2;$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2+\frac{1}{x}}}$

(vì $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt[3]{4x^6+3x-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{4+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^6}}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{4+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^6}}}=\frac{2+1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Ví dụ 7 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin 2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x^2}{\sin^2 x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2}.\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)=0.1=0$ (vì $\dfrac{2x}{\sin 2x}\to1$ khi $x\to0$).

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(3x^2)}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\left(\dfrac{x+3x^2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-3x^2}{2}\right)}{\sin^2 x}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x+3x^2}{2}\right)}{\dfrac{x+3x^2}{2}}\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{x-3x^2}{2}\right)}{\dfrac{x-3x^2}{2}}\times\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\times\dfrac{(x+3x^2)(x-3x^2)}{4x^2}$

$=-2.1.1.1.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-9x^4}{4x^2}=-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}x^2\right)=-2.\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x\sin x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}.(1+\cos x+\cos^2 x)}{4x\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x}$

(Vì $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$; $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right).\dfrac{1+\cos x+\cos^2 x}{4\cos\dfrac{x}{2}\cos x}=1.\dfrac{1+1+1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(Vì $\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\to 1$, $\cos x\to 1$, $\cos\dfrac{x}{2}\to 1$ khi $x\to 0$)

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)+\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1.$

Ví dụ 8 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+1)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\tan x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 0}x.\sin\dfrac{2}{x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+a)-2\sin(x+a)+\sin a}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin(2x+a)-\sin(x+a)]+[\sin a-\sin(x+a)]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\left(\dfrac{3x+2a}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}+2\cos\left(\dfrac{x+2a}{2}\right)\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2}\sin\dfrac{x}{2}\left[\cos\left(\dfrac{3x+2a}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{x+2a}{2}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2}.\sin\dfrac{x}{2}(-2)\sin(x+a)\sin\dfrac{x}{2}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2.\sin(x+a)=-\sin a$ (vì $\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\to 1$ khi $x\to 0$)

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim\limits_{t\to 0}t.\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$, (với $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-t$)

$=\lim\limits_{t\to 0}t.\cot t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$

(vì $\dfrac{\tan t}{t}\to 1$ khi $t\to 0$)

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\tan x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)\cos x}{\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{0}{1+1}=0$

d) Ta có : $\left|\sin\dfrac{2}{x}\right|\le 1$ với mọi $x\ne 0$ nên suy ra : $\lim\limits_{x\to 0}x.\sin\dfrac{2}{x}=0$

Ví dụ 9 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$

Hướng dẫn giải

a) $$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $$\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to\pi} \frac{-2\tan x}{\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\left(\sqrt{1-\tan x} + \sqrt{1+\tan x}\right)}$$

$$= \lim\limits_{x\to\pi} \frac{-(1+\tan^2 x)}{\left(\sqrt{1-\tan x} + \sqrt{1+\tan x}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\sin x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\left|\cos \frac{x}{2}\right|}{\sin x} = -\sqrt{2} \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin x}$$

(vì $x \to \pi^+$ thì $\frac{x}{2} > \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{x}{2} < 0$)

$$= -\sqrt{2} \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) $$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x - (1 - \sin 2x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x - \sin x)^2}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[-(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)\right]$$

$$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (-2\cos x) = -\sqrt{2}.$$

Ví dụ 10 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+a)-\cos(a-x)}{x}$;

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)}$;

d) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan(a+2h)-2\tan(a+h)+\tan a}{h^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+a)-\cos(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin a\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(-2\sin a).\dfrac{\sin x}{x}=-2\sin a.$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}\left[\sin(a+2h)-\sin(a+h)+\sin a-\sin(a+h)\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}\left[2\cos\left(a+\dfrac{3h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}+2\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right)\sin\left(-\dfrac{h}{2}\right)\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}2\sin\dfrac{h}{2}\left[\cos\left(a+\dfrac{3h}{2}\right)-\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right)\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}2\sin\dfrac{h}{2}.(-2)\sin(a+h)\sin\dfrac{h}{2}$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2.\sin(a+h)=-\sin a.$ (Vì khi $h\to 0$ thì $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$).

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos a\sin x.\dfrac{\cos(a+x).\cos(a-x)}{\sin 2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\cos a.\dfrac{\cos(a+x).\cos(a-x)}{\cos x}=\cos^3 a.$

d) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan(a+2h)-2\tan(a+h)+\tan a}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan(a+2h)-\tan(a+h)+\tan a-\tan(a+h)}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\sin h}{h^2\cos(a+2h)\cos(a+h)}+\dfrac{\sin(-h)}{h^2\cos a\cos(a+h)}\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h^2\cos(a+h)}\left(\dfrac{1}{\cos(a+2h)}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h^2}\dfrac{\cos a-\cos(a+2h)}{\cos a\cos(a+h)\cos(a+2h)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h^2}\dfrac{-2\sin(a+h)\sin(-h)}{\cos a\cos(a+h)\cos(a+2h)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)^2.\dfrac{\sin(a+h)}{\cos a\cos(a+h)\cos(a+2h)}$

$=2.1.\dfrac{\sin a}{\cos a\cos a\cos a}=\dfrac{2\sin a}{\cos^3 a}.$

(Ta đã dùng công thức $\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$ trong câu d)).

Ví dụ 11 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$;　　b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\tan x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\dfrac{2}{1+1}=1$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\sin^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}=\frac{3}{2};$$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\{\sin(a+3h)-\sin a-3[\sin(a+2h)-\sin(a+h)]\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left[2\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}-3.2\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right]$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)\left[\sin 3\left(\frac{h}{2}\right)-3\sin\frac{h}{2}\right]$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\cos(a+3h).(-4)\left(\sin\frac{h}{2}\right)^3,\ (\text{vì } \sin 3x-3\sin x=-4\sin^3 x)$$

$$=-\lim_{h\to 0}\cos(a+3h).\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^3=-\cos a;$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=0$$

(Vì $\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 1$, $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\to 0$ khi $x\to+\infty$).

Ví dụ 12 : Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;   b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x.\sin 2x\ldots\sin nx}{x^n}$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{4}.\cos\dfrac{x}{8}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2t}$ (với $t=\dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2t}$)

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2$. (Ta đã dùng kết quả $e = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$).

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-4x)^{\frac{1}{x}-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-t)^{\frac{4}{t}-1}$ (với $t = 4x$)

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{(1-t)^{\frac{4}{t}}}{1-t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]^4 = \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{y}\right)^y\right]^4$

(trong đó $y=\dfrac{1}{t}$, $y\to+\infty$ khi $t\to 0^+$)

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\left(\dfrac{y-1}{y}\right)^y\right]^4 = \left(e^{-1}\right)^4 = e^{-4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x.\sin 2x\ldots\sin nx}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{\sin 2x}{x}\ldots\dfrac{\sin nx}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{\sin 2x}{2x}\ldots\dfrac{\sin nx}{nx}.2.3\ldots n = 2.3\ldots n = n!$

(vì $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, $\dfrac{\sin 2x}{2x}\to 1$, …, $\dfrac{\sin nx}{nx}\to 1$ khi $x\to 0$).

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{4}.\cos\dfrac{x}{8}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}$

Đặt : $M = \cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{4}.\cos\dfrac{x}{8}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}$, ta có :

$$M = \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{4}.\cos\dfrac{x}{8}\ldots\left(\sin\dfrac{x}{2^n}.\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$$

(Nhân và chia cho $\sin\frac{x}{2^n}$)

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{8}\ldots\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)$$

(vì $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$)

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{8}\ldots\left(\cos\frac{x}{2^{n-1}}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}.\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}}.\sin\frac{x}{2^{n-2}}$$

Và cứ tiếp tục như thế, ta được : $M = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

Do đó, ta có : $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x}.\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right) = \frac{\sin x}{x}$

(Vì $n \to +\infty$ thì $\frac{x}{2^n} \to 0$ nên $\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \to 1$).

§2. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

– Hàm số f liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm f liên tục trên miền D nếu f liên tục tại mọi $x \in D$.

2. Tính chất :

– Cho f và g là hai hàm số liên tục tại x_0 thì $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ cũng liên tục tại x_0 (với $g(x_0) \neq 0$).

– Cho f liên tục trên đoạn [a ; b] và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm x thuộc khoảng (a, b).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Xét tính liên tục tại các điểm tương ứng của các hàm số sau :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 7 & \text{nếu } x = 1 \text{ ;} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0 \text{ ;} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 4 & \text{nếu } x \geq 1 \text{ ;} \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : f(1) = 7 ; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 6) = 7 = f(1)$.

Vậy f liên tục tại x = 1.

b) Ta có : f(0) = 2 ; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}.2 = 2 = f(0)$.

Vậy f liên tục tại x = 0.

c) Ta có : $f(0) = 0^2 = 0$;

Và : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$

nên $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Vậy f liên tục tai x = 0.

Ta lại có : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + 4x - 4) = -1$

Do đó $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Vậy f không liên tục tại x = 1.

d) Ta có : $f(0) = 0$;

Và : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}+1} = 0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vậy f liên tục tại $x = 0$.

Ví dụ 2 : Tìm a, b để hàm số sau liên tục tại $x = \pm\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{nếu } x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{nếu } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{nếu } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) = a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -a + b.$$

Để f liên tục tại $x = -\frac{\pi}{2}$ thì phải có : $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ tức là :

$$-a + b = 2 \qquad (1)$$

Ta lại có : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = a\sin\frac{\pi}{2} + b = a + b.$$

Để f liên tục tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì phải có $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tức là :

$$a + b = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $b = 1$, $a = -1$.

Kết luận : f liên tục tại $x = \pm\frac{\pi}{2}$ khi $a = -1$, $b = 1$.

Ví dụ 3 : Chứng minh phương trình sau có ít nhất hai nghiệm : $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$, rõ ràng f là hàm số liên tục trên **R**.

Ta có : $f(0) = -20 < 0$;

$f(-2) = 48 + 32 - 24 - 24 - 20 = 80 - 68 = 12 > 0$;

$f(3) = 243 - 108 - 54 + 36 - 20 = 279 - 182 = 97 > 0$;

Do đó $f(-2).f(0) < 0$ và $f(0).f(3) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $f(x) = 0$ có nghiệm $x_1 \in (-2 ; 0)$, $x_2 \in (0 ; 3)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 4 : Chứng minh phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1 ; 2)$ và thoả mãn điều kiện $x_0 > \sqrt[9]{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^5 - x - 2$ thì f là hàm liên tục trên đoạn [1 ; 2].

Ta có $f(1) = -2$, $f(2) = 28$ nên $f(1).f(2) < 0$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in [1 ; 2]$. Suy ra :

$$x_0^5 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 + 2 = x_0^5 \qquad (*)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì :

$$x_0 + 2 > 2\sqrt{2x_0}$$

(vì $x_0 \neq 2$ nên không xảy ra dấu "=") nên (*) cho ta :

$$x_0^5 > 2\sqrt{2x_0} \Rightarrow x_0^{10} > 4.2x_0 \Rightarrow x_0^9 > 8 \Rightarrow x_0 > \sqrt[9]{8}.$$

Ví dụ 5 : Cho $a \leq b \leq c \leq d$ và $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$. Chứng minh phương trình : $p(x - a)(x - c) + q(x - b)(x - d) = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = p(x - a)(x - c) + q(x - b)(x - d)$ thì $f(x)$ là hàm số liên tục trên **R** và ta có :

$$f(a) = q(a - b)(a - d)$$

$$f(c) = q(c - b)(c - d)$$

nên : $f(a)f(c) = q^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d) \le 0$ (vì $a \le b \le c \le d$ nên $a-b \le 0$, $a-d \le 0$, $c-b \ge 0$, $c-d \le 0$).

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Ví dụ 6 : Cho ba số a, b, c. Chứng minh phương trình sau có nghiệm :

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0.$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b)$ thì f là hàm số liên tục trên **R**. Ta có :

$$f(0) = 3abc ;$$

$$f(a) = a(a-b)(a-c) ;$$

$$f(b) = b(b-c)(b-a) ;$$

$$f(c) = c(c-a)(c-b)$$

nên : $f(0).f(a).f(b) = -3a^2b^2c^2(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 \le 0.$

Suy ra : $[f(0).f(a)].[f(b).f(c)] \le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0).f(a) \le 0 \\ f(b).f(c) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(0).f(a) \ge 0 \\ f(b).f(c) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(a) \le 0 \\ f(b).f(c) \le 0 \end{array}\right.$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Ví dụ 7 : Cho phương trình $x^3 + mx - 1 = 0$. Chứng minh với mọi $m \in \mathbf{R}$ thì phương trình luôn có nghiệm $x > 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x^3 + mx - 1$, dễ thấy rằng f(x) liên tục trên **R**.

Ta có : $f(0) = -1 < 0$;

Và : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + mx - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

nên tồn tại $a > 0$ sao cho $f(a) > 0$ do đó $f(0).f(a) < 0$ và suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; a)$.

Vậy phương trình $x^3 + mx - 1 = 0$ luôn có nghiệm $x > 0$.

Ví dụ 8 : Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện :

$$2a + 3b + 6c = 0 \qquad (*)$$

1) Tính a, b, c theo f(0), f(1), $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

2) Chứng tỏ rằng ba số f(0), f(1), $f\left(\frac{1}{2}\right)$ không thể cùng dấu ;

3) Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có : f(0) = c

$$f(1) = a + b + c \Rightarrow a + b = f(1) - f(0) \qquad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \qquad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được : $a = 2f(1) + 2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0).$$

2) Thế a, b, c trong câu 1) vào hệ thức (*) ta có :

$$f(1) + f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (**)$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng ba số f(1), f(0) và $f\left(\frac{1}{2}\right)$ không thể mang cùng một dấu.

3) Do câu 2) nên có 3 trường hợp sau xảy ra :

Trường hợp 1 : $f(0).f(1) < 0$

Lúc đó f(x) = 0 có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Trường hợp 2 : $f(0).f(1) > 0$

Lúc đó (**) cho ta $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ (vì f(0), f(1), $f\left(\frac{1}{2}\right)$ không cùng dấu) nên f(x) = 0 có nghiệm $x \in \left(0 ; \frac{1}{2}\right) \subset (0 ; 1)$.

Trường hợp 3 : $f(0).f(1) = 0$

i) Xét $f(0) = 0$, $f(1) \neq 0$:

$$(**) \Leftrightarrow f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

nên $f(1).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ do đó $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \subset (0 ; 1)$.

ii) Xét $f(0) \neq 0$, $f(1) = 0$:

$$(**) \Leftrightarrow f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

nên $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ và suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(0 ; \frac{1}{2}\right) \subset (0 ; 1)$.

iii) Xét $f(0) = f(1) = 0$:

$$(**) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

nên $f(x) = 0$ có nghiệm $x = \frac{1}{2} \in (0 ; 1)$.

Kết luận : Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Ví dụ 9 : Cho $m > 0$ và ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện :

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \qquad (*)$$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Chứng minh $af\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ (với $a \neq 0$) ;

2) Cho $a > 0$, $c < 0$. Chứng minh $f(1) > 0$;

3) Suy ra phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có : $f\left(\frac{m}{m+1}\right) = a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 + b\left(\frac{m}{m+1}\right) + c = m\left[\frac{am}{(m+1)^2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right]$

$$= m\left[\frac{am}{(m+1)^2} - \frac{a}{m+2}\right] \text{ (do (*))}$$

$$= am.\frac{m(m+2)-(m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)} = \frac{-am}{(m+1)^2(m+2)}$$

Do đó $af\left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{-a^2m}{(m+1)^2(m+2)} < 0$ (vì $m > 0$)

2) Ta có : $f(1) = a + b + c$

$$= (m+1)\left(\frac{a}{m+1} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m+1}\right)$$

$$= (m+1)\left[\frac{a}{m+1} - \left(\frac{c}{m} + \frac{a}{m+2}\right) + \frac{c}{m+1}\right] \text{ (do (*))}$$

$$= (m+1)\left[\frac{a}{(m+1)(m+2)} - \frac{c}{m(m+1)}\right]$$

Với $a > 0$, $c < 0$, $m > 0$ thì ta có $f(1) > 0$.

3) Ta chia 3 trường hợp như sau :

Trường hợp 1 : $a = 0$

Ta có : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}$

và : (*) $\Leftrightarrow \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{m+1} = -\frac{c}{m} \Leftrightarrow -\frac{c}{b} = \frac{m}{m+1} \in (0\,;1).$$

Do đó phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm là :

$$x = \frac{m}{m+1} \in (0\,;1)$$

Trường hợp 2 : $a > 0$

Theo câu 1) thì $af\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ nên $f\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$, ngoài ra $f(0) = c$.

+ Nếu $c > 0$ thì $f(0).f\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(0\,;\frac{m}{m+1}\right) \subset (0\,;1)$.

+ Nếu c < 0 thì theo câu 2) ta lại có f(1) > 0 nên $f\left(\frac{m}{m+1}\right).f(1) < 0$. Suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{m}{m+1}; 1\right) \subset (0; 1)$.

+ Nếu c = 0 thì (*) $\Leftrightarrow \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{m+2} \in (0; 1)$$

Lúc đó : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{m+2} \in (0; 1) \end{array}\right.$$

nên $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Trường hợp 3 : a < 0

Với a < 0 thì câu 1) cho ta $f\left(\frac{m}{m+1}\right) > 0$

+ Nếu c < 0 thì có $f(0).f\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ nên f(x) = 0 có nghiệm $x \in \left(0; \frac{m}{m+1}\right) \subset (0; 1)$.

+ Nếu c > 0 thì theo câu 2) ta có :

$$f(1) = (m+1)\left[\frac{a}{(m+1)(m+2)} - \frac{c}{m(m+1)}\right] < 0$$

nên f(0).f(1) < 0 và do đó f(x) = 0 có nghiệm $x \in (0; 1)$.

+ Nếu c = 0 thì làm như trường hợp 2.

Kết luận : $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0; 1)$.

C. LUYỆN TẬP

1.1 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\sin 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

1.2 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

1.3 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

1.4 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

1.5 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)+\sin(x-h)}{h}$.

1.6 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

1.7 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

1.8 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)$.

1.9 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

1.10 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right)$.

1.11 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

1.12 Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$.

1.13 Xét tính liên tục của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & \text{nếu } |x|<2\\[4pt] \dfrac{5}{2} & \text{nếu } |x|=2\\[4pt] 3 & \text{nếu } |x|>2.\end{cases}$$

1.14 Xét tính liên tục của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{nếu } x=0 \text{ hay } x=\pm 2\\ 4-x^2 & \text{nếu } 0<|x|<2\\ 4 & \text{nếu } \quad |x|>2.\end{cases}$$

1.15 Xét tính liên tục của hàm số :

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{2}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

1.16 Cho hàm số f(x) xác định bởi :

$$f(x)=\begin{cases}2\dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ a^2-a & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Tìm a để hàm số f(x) liên tục tại x = 0.

Chương 2.

ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

§3. ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

Cho hàm số f : (a, b) → **R** và $x_0 \in (a ; b)$.

– Đạo hàm của f tại x_0 là :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

– Đạo hàm bên trái của f tại x_0 là :

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

– Đạo hàm bên phải của x_0 là :

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

– Nếu $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ thì tồn tại $f'(x_0)$ và

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

– Nếu $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ thì không tồn tại $f'(x_0)$.

2. Tính chất :

Cho u, v là hai hàm số có đạo hàm thì

$$(u \pm v)' = u' \pm v' ; (ku)' = ku' \ (k \in \mathbf{R}) ;$$

$$(u.v)' = u'v + uv' ; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0)$$

3. Đạo hàm của hàm số hợp :

Cho y là hàm số theo u và u là hàm số theo x thì

$$y'_x = y'_u \times u'_x$$

4. **Đạo hàm của hàm số ngược :**

Cho f^{-1} là hàm số ngược của hàm số f thì

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ (với } y = f(x) \text{ và } f'(x) \neq 0)$$

5. **Ý nghĩa hình học của đạo hàm :**

Cho (C) là đồ thị của hàm số y = f(x) thì

* $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0\,;\,f(x_0))$;

* Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0\,;\,f(x_0))$ là

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0).$$

6. **Bảng công thức đạo hàm :**

$(C)' = 0$ (với $C \in \mathbf{R}$) ; $\qquad (\sin x)' = \cos x$;

$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$; $\qquad (\cos x)' = -\sin x$;

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$;

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

$\left(e^x\right)' = e^x$; $\qquad \left(a^x\right)' = a^x.\ln a$;

$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$; $\qquad \left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x.\ln a}$;

Cho u là hàm số theo biến x, ta có :

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$; $\qquad (\sin u)' = u'.\cos u$;

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$; $\qquad (\cos u)' = -u'.\sin u$;

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\qquad (\tan u)' = u'\left(1 + \tan^2 u\right) = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

$\left(e^u\right)' = u'.e^u$ $\qquad (\cot u)' = -u'\left(1 + \cot^2 u\right) = -\frac{u'}{\sin^2 u'}$;

$\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$; $\qquad \left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}$;

$$\left(\log_a|u|\right)' = \frac{u'}{u\ln a};\qquad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}}{\left(a'x^2+b'x+c'\right)^2}.$$

7. **Vi phân của hàm số :**

Vi phân của $y = f(x)$ là $dy = f'(x)dx$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số :

a) $y = |x|$ tại $x_0 = 0$; b) $y = \sqrt[3]{x}$ tại $x = x_0$ (với $x_0 \neq 0$);

c) $y = \tan x$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; d) $y = x\sin x + 3\cos x$ tại $x = x_0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-0}{x-0} = 1$;

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x-0}{x-0} = -1$.

Vì $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ nên không tồn tại $f'(0)$.

b) Ta có : $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2};$$

c) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{d(x) - f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{x-\dfrac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - \tan\dfrac{\pi}{4}}{x-\dfrac{\pi}{4}} =$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x.\cos\frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}.\frac{1}{\cos x.\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1.\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2;$$

d) Ta có : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x\sin x + 3\cos x - (x_0 \sin x_0 + 3\cos x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x\sin x - x_0 \sin x_0}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{3(\cos x - \cos x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x\sin x - x\sin x_0) + (x\sin x_0 - x_0 \sin x_0)}{x - x_0}$$

$$+3.\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x(\sin x - \sin x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\sin x_0}{x - x_0}$$

$$+3.\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0},$$

với : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x(\sin x - \sin x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x.\dfrac{2\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} x.\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = x_0 \cos x_0;$$

và : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -2\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0}$

$$= -\lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = -\sin x_0.$$

Do đó : $f'(x_0) = x_0\cos x_0 + \sin x_0 - 3\sin x_0 = x_0\cos x_0 - 2\sin x_0$.

Ví dụ 2 : Tính đạo hàm của :

a) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$; b) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$;

c) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; d) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = (x^2 - 3x + 3)'(x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)'$

$= (2x - 3)(x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3)(2x + 2) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9.$

b) $y' = (x^3 - 3x + 2)'(x^4 + x^2 - 1) + (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)'$

$= (3x^2 - 3)(x^4 + x^2 - 1) + (x^3 - 3x + 2)(4x^3 + 2x)$

$= 7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 3.$

c) $y' = (\sqrt{x} + 1)'\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)'$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + (\sqrt{x} + 1).\frac{-1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$

d) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ nên

$y' = 6x^5 - 56x^3 + 98x.$

Ví dụ 3 : Tính đạo hàm của :

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$; b) $y = \frac{x^3}{2 - x}$;

c) $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1}$; d) $y = \frac{1 - x^3}{3 + x^3}$;

e) $y = \frac{3}{x^3 + 1}$; f) $y = \frac{(x + 1)^3}{x^2 - x + 1}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 + 2) - (x^2 + 1)(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x(x^2 + 2) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 + 2)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2 + 2)^2}.$

b) $y' = \dfrac{(x^3)'(2-x) - x^3(2-x)'}{(2-x)^2} = \dfrac{3x^2(2-x) + x^3}{(2-x)^2} = \dfrac{-2x^3 + 6x^2}{(2-x)^2}$.

c) $y' = \dfrac{(x^3 - x)'(x^2 + x + 1) - (x^3 - x)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2}$

$= \dfrac{(3x^2 - 1)(x^2 + x + 1) - (x^3 - x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.

d) $y' = \dfrac{(1 - x^3)'(3 + x^3) - (1 - x^3)(3 + x^3)'}{(3 + x^3)^2}$

$= \dfrac{-3x^2(3 + x^3) - (1 - x^3).3x^2}{(3 + x^3)^2} = \dfrac{-12x^2}{(3 + x^3)^2}$.

e) $y' = -3.\dfrac{(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = -3.\dfrac{3x^2}{(x^3 + 1)^2} = -\dfrac{9x^2}{(x^3 + 1)^2}$.

f) $y' = \dfrac{[(x+1)^3]'(x^2 - x + 1) - (x + 1)^3(x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2}$

$= \dfrac{3(x + 1)^2(x^2 - x + 1) - (x + 1)^3(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$= \dfrac{(x + 1)^2(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{(x + 1)^2(x - 2)^2}{(x^2 - x + 1)^2}$.

Ví dụ 4 : Tính đạo hàm của :

a) $y = (1 - 3x^2)^4$;

b) $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)^3$;

c) $y = \left(\dfrac{3x + 1}{x + 2}\right)^3$;

d) $y = \dfrac{1}{(x^4 + x - 3)^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 4(1 - 3x^2)'(1 - 3x^2)^3 = 4(-6x)(1 - 3x^2)^3 = -24x(1 - 3x^2)^3$.

b) $y' = 3\left(x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)'.\left(x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)^2$

$= 3\left(2x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right).\left(x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)^2$.

c) $y' = 3\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)'.\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2 = 3.\frac{5}{(x+2)^2}.\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^3.$

d) $y' = \frac{-2(x^4+x-3)'}{(x^4+x-3)^3} = \frac{-2(4x^3+1)}{(x^4+x-3)^3}.$

Ví dụ 5 : Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$;

b) $y = (x-2).\sqrt{x^2+3}$;

c) $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$;

d) $y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$;

e) $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$;

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^8+x^4+2}}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}.2\sqrt{x}+\sqrt{x}}.$

b) $y' = (x-2)'.\sqrt{x^2+3} + (x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$

$= \sqrt{x^2+3} + \frac{2x(x-2)}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}.$

c) $y' = \frac{(4x+1)'\sqrt{x^2+2}-(4x+1)(\sqrt{x^2+2})'}{x^2+2}$

$= \frac{4\sqrt{x^2+2}-(4x+1).\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{4(x^2+2).-(4x+1)x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}.$

d) $y' = \frac{(x)'\sqrt{9-x^2}-x.\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$

e) $y' = \frac{(\sqrt{x^2+4})'x-\sqrt{x^2+4}.(x)'}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.x-\sqrt{x^2+4}}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - (x^2+4)}{x^2.\sqrt{x^2+4}} = -\frac{4}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$$

f) $y' = \frac{-(\sqrt{x^8+x^4+2})'}{x^8+x^4+2} = \frac{-(x^8+x^4+2)'}{2.\sqrt{x^8+x^4+2}.(x^8+x^4+2)} = \frac{-(8x^7+4x^3)}{2(x^8+x^4+2)^{\frac{3}{2}}}.$

Ví dụ 6 : Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \cos x^2$; b) $y = \sin^2(2x^2+1)$;

c) $y = \sin(\sqrt{4+x^2})$; d) $y = \sin^2(\cos 3x)$;

e) $y = \cos^3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$; f) $y = \tan(\sin x^2)$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = -(x^2)'\sin x^2 = -2x\sin x^2$.

b) $y' = 2\sin(2x^2+1).[\sin(2x^2+1)]' = 2\sin(2x^2+1).(2x^2+1)'\cos(2x^2+1)$

$$= 2\sin(2x^2+1).4x.\cos(2x^2+1) = 4x\sin(4x^2+2).$$

c) $y' = (\sqrt{4+x^2})'\cos(\sqrt{4+x^2}) = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\cos(\sqrt{4+x^2})$

$$= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\cos(\sqrt{4+x^2}).$$

d) $y' = 2\sin(\cos 3x).[\sin(\cos 3x)]'$

$$= 2\sin(\cos 3x).(\cos 3x)'\cos(\cos 3x)$$

$$= 2\sin(\cos 3x).(-3\sin 3x).\cos(\cos 3x)$$

$$= -3\sin 3x.\sin(2\cos 3x).$$

e) $y' = 3\cos^2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\left[\cos\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right]'$

$$= 3\cos^2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right).\left[-\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'\sin\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$= 3\cos^2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right).\frac{3}{(x-1)^2}.\sin\left(\frac{2x+1}{x-1}\right).$$

f) $y' = (\sin x^2)'[1 + \tan^2(\sin x^2)] = (x^2)'\cos x^2.[1 + \tan^2(\sin x^2)]$

$= 2x\cos x^2.[1 + \tan^2(\sin x^2)]$.

Ví dụ 7 : Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng :

a) $(\sin^n x\cos nx)' = n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$;

b) $(\sin^n x\sin nx)' = n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x$;

c) $(\cos^n x\sin nx)' = n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x$;

d) $(\cos^n x.\cos nx)' = -n\cos^{n-1} x\sin(n+1)x$.

Hướng dẫn giải

a) $(\sin^n x\cos nx)' = (\sin^n x)'\cos nx + \sin^n x(\cos nx)'$

$= n\sin^{n-1} x.\cos x\cos nx + \sin^n x.(-n\sin nx)$

$= n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$.

b) $(\sin^n x\sin nx)' = (\sin^n x)'\sin nx + \sin^n x(\sin nx)'$

$= n\sin^{n-1} x\cos x\sin nx + \sin^n x(n\cos nx)$

$= n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x$.

c) $(\cos^n x\sin nx)' = (\cos^n x)'\sin nx + \cos^n x(\sin nx)'$

$= -n\cos^{n-1} x\sin x\sin nx + \cos^n x.n\cos nx$

$= n\cos^{n-1} x(-\sin x\sin nx + \cos x\cos nx)$

$= n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x$.

d) $(\cos^n x\cos nx)' = (\cos^n x)'\cos nx + \cos^n x.(\cos nx)'$

$= -n\cos^{n-1} x\sin x\cos nx + \cos^n x(-n\sin nx)$

$= -n\cos^{n-1} x(\sin x\cos nx + \cos x\sin nx)$

$= -n\cos^{n-1} x\sin(1+n)x$.

Ví dụ 8 : Tính đạo hàm của :

a) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$;

b) $y = \log_3[x - \cos(\sin x)]$;

c) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$;

d) $\ln(\sin x^2)$;

Hướng dẫn giải

a) $y' = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)' \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$.

b) $y' = \dfrac{[x-\cos(\sin x)]'}{\ln 2.[x-\cos(\sin x)]} = \dfrac{1+\cos x.\sin(\sin x)}{\ln 2.[x-\cos(\sin x)]}$.

c) $y' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)'}{x+\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

d) $y' = \dfrac{[\sin(x^2)]'}{\sin x^2} = \dfrac{(x^2)'\cos x^2}{\sin x^2} = 2x.\cot gx^2$.

Ví dụ 9 : Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = e^{-2x}\sin x$;

b) $y = 2^{3^x}$;

c) $y = (x^2+x)e^{-2x}$;

d) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

e) $y = 4^x.x^3$;

f) $y = 2^{\sin^3 2x}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = (e^{-2x})'\sin x + e^{-2x}(\sin x)' = -2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x$

$= e^{-2x}(\cos x - 2\sin x)$.

b) $y' = (3^x)'2^{3^x}\ln 2 = 3^x\ln 3.2^{3^x}.\ln 2$.

c) $y' = (x^2+x)'.e^{-2x} + (x^2+x).(e^{-2x})' = (2x+1).e^{-2x} + (x^2+x).(-2e^{-2x})$

$= e^{-2x}(2x+1-2x^2-2x) = e^{-2x}(1-x^2)$.

d) $y' = \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' 2^{\frac{x}{\ln x}}.\ln 2 = \dfrac{\ln x - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}.2^{\frac{x}{\ln x}}.\ln 2 = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.2^{\frac{x}{\ln x}}.\ln 2$.

e) $y' = (4^x)'x^3 + 4^x.(x^3)' = 4^x\ln 4.x^3 + 4^x.3x^2 = x^2.4^x(x\ln 4 + 3)$.

f) $y' = (\sin^3 2x)'.2^{\sin^3 2x}.\ln 2 = 3.\sin^2 2x.(\sin 2x)'.2^{\sin^3 2x}.\ln 2$

$= 3.\sin^2 2x.2\cos 2x.2^{\sin^3 2x}.\ln 2 = 6.\sin^2 2x.\cos 2x.2^{\sin^3 2x}.\ln 2$.

Ví dụ 10 : tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^{x^2}$; b) $y = x^{x^x}$; c) $y = (\ln x)^x$;

d) $y = x^{\ln x}$; e) $y = x^{\sin x}$; g) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

Hướng dẫn giải

a) $y = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$.

Lấy đạo hàm của hai vế, ta có :

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln x + x^2.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(2x\ln x + x)$$

Suy ra : $y' = x^{x^2}(2x\ln x + x)$.

b) $y = x^{x^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x} = x^x.\ln x$

Lấy đạo hàm cả hai vế, ta có :

$$\frac{y'}{y} = (x^x)'.\ln x + x^x.(\ln x)' = (x^x)'.\ln x + x^x.\frac{1}{x}$$

Mặt khác, nếu đặt $t = x^x$ thì $\ln t = x\ln x$ nên :

$$\frac{t'}{t} = \ln x + x.\frac{1}{x} \Rightarrow t' = t(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Vậy : $y' = y[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}] = x^{x^x}[x^x.(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}]$.

c) $y = (\ln x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\ln x)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x.\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow y' = (\ln x)^x\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right].$$

d) $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln(x^{\ln x}) = \ln x.\ln x = (\ln x)^2$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{2}{x}\ln x.x^{\ln x}.$$

e) $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x.\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x.\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

f) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + x.\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{1+x}}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + x.\frac{1+x}{x}.\frac{1}{(x+1)^2} = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}.$$

Vậy : $y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right].$

Ví dụ 11 : Cho $y = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Chứng minh rằng : $e^y - xy' - 1 = 0.$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \left(\frac{1}{x+1}\right)'.(x+1) = \frac{-1}{(x+1)^2}.(x+1) = -\frac{1}{x+1}.$

Do đó : $e^y - xy' - 1 = e^{\ln\frac{1}{(1+x)}} - x\left(\frac{-1}{x+1}\right) - 1$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{1+x}{1+x} - 1 = 0$$

Vậy : $e^y - xy' - 1 = 0.$

Ví dụ 12 : Cho hàm số : $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}.$

Chứng minh rằng : $2y = xy' + \ln y'.$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ nên :

$$2y = x\sqrt{x^2+1} + x^2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Ta lại có : $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x + \frac{1}{2}.\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + x = \sqrt{x^2+1} + x$$

Do đó : $xy' + \ln y' = x(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

$$= x\sqrt{x^2+1} + x^2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Vậy ta được : $2y = xy' + \ln y'$.

Ví dụ 13 : Cho $x \neq 1$. Tính các tổng số sau đây :

$S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ (với n là số nguyên dương)

$S_2 = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $S_1 = (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \ldots + (x^n)'$

$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)' = \left(x.\frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2};$$

$S_2 = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$

$$= (2x)' + (3x^2)' + (4x^3)' + \ldots + (nx^{n-1})' = (2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1})'$$

$$= (S_1 - 1)' = S_1'$$

$$= \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}.$$

Ví dụ 14 : Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y = \cos x$; b) $y = \sin x$; c) $y = \frac{1}{x+1}$;

d) $y = \ln|x|$;   e) $y = e^{3x}$;   g) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $y'' = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2.\dfrac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán : $y^n = \cos\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra : $y^{(n+1)} = -\sin\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left[x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

Vậy : $y^{(n)} = \cos\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right)$ với mọi $n \geq 1$.

b) Ta có : $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

Dự đoán : $y^{(n)} = \sin\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra : $y^{(n+1)} = \cos\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

Vậy : $y^{(n)} = \sin\left(x + n.\dfrac{\pi}{2}\right)$ với mọi $n \geq 1$.

c) Ta có : $y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $y^{(3)} = \dfrac{-3!}{(x+1)^4}$

Dự đoán : $y^{(n)} = (-1)^n.\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

Suy ra : $y^{(n+1)} = (-1)^n.\dfrac{-n!(n+1)}{(x+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

Vậy : $y^{(n)} = (-1)^n.\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ với mọi $n \geq 1$.

d) Ta có : $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = \dfrac{-1}{x^2}$, $y^{(3)} = \dfrac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = \dfrac{-3!}{x^4}$

Dự đoán : $y^{(n)} = (-1)^{n+1}.\frac{(n-1)!}{x^n}$

Suy ra : $y^{(n+1)} = (-1)^{n+1}.\frac{-n(n-1)!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2}.\frac{n!}{x^{n+1}}$

Vậy : $y^{(n)} = (-1)^{n+1}.\frac{(n-1)!}{x^n}$ với mọi $n \geq 1$.

e) Ta có : $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 3^2e^{3x}$, $y^{(3)} = 3^3.e^{3x}$

Dự đoán : $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$

Suy ra : $y^{(n+1)} = 3^n.3e^{3x} = 3^{n+1}.e^{3x}$

Vậy : $y^{(n)} = 3^n.e^{3x}$ với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 15 : Cho hàm số $y = e^{-x}\sin x$. Chứng minh rằng :

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x$$

Do đó : $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}[-2\cos x + 2(\cos x - \sin x) + 2\sin x] = 0$

Vậy : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Ví dụ 16 : Cho hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$. Chứng minh rằng :

$$y^{(3)} - 13y' - 12y = 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$, $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$, $y^{(3)} = 64e^{4x} - 2e^{-x}$

Do đó : $y^{(3)} - 13y' - 12y = 64e^{4x} - 2e^{-x} - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x})$

$$= (64 - 52 - 12)e^{4x} + e^{-x}(-2 + 26 - 24) = 0$$

Vậy : $y^{(3)} - 13y' - 12y = 0$.

Ví dụ 17 : Cho đồ thị (C) của hàm số : $y = x^2 - 2x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết rằng :

a) Tiếp điểm có hoành độ $x = 2$.

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 2x$.

c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d) ; $y = -\frac{1}{6}x$.

d) Tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc bằng 45°.

e) Tiếp tuyến đi qua điểm A(4 ; 0).

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = 2x - 2$

Tại $x_0 = 2$ thì $y_0 = 2$; $y'(2) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y - 2 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

b) Tiếp tuyến song song với (d) : $y = 2x$ nên có hệ số góc bằng 2, do đó ta có : $y' = 2 \Leftrightarrow 2x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = 2x - 2$.

c) Tiếp tuyến vuông góc với (d) : $y = -\frac{1}{6}x$ nên có hệ số góc bằng 6, do đó ta có : $y' = 6 \Leftrightarrow 2x - 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$.

Với $x = 4$ thì $y = 10$ nên tiếp tuyến cần tìm có phương trình là : $y - 10 = 6(x - 4) \Leftrightarrow y = 6x - 14$.

d) Tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc bằng 45° nên hệ số góc là $tg(\pm 45^\circ) = \pm 1$.

Xét $y' = 1 \Leftrightarrow 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Với $x = \frac{3}{2}$ thì $y = \frac{5}{4}$ nên tiếp tuyến cần tìm có phương trình là : $y - \frac{5}{4} = x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{4}$.

Xét $y' = -1 \Leftrightarrow 2x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ suy ra $y = \frac{5}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y - \frac{5}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{4}.$$

e) Tiếp tuyến với (C) có phương trình dạng :

$$y - \left(x_0^2 - 2x_0 + 2\right) = \left(2x_0 - 2\right)\left(x - x_0\right)$$

Tiếp tuyến đi qua A(4 ; 0) nên ta có :

$$0-\left(x_0^2-2x_0+2\right)=\left(2x_0-2\right)\left(4-x_0\right)\Leftrightarrow x_0^2-8x_0+6=0$$

$$\Leftrightarrow x_0=4\pm\sqrt{10}$$

Với $x_0=4+\sqrt{10}$ thì $y_0=20+6\sqrt{10}$, $y'=6+2\sqrt{10}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y=\left(6+2\sqrt{10}\right)x-8\left(3+\sqrt{10}\right)$$

Với $x_0=4-\sqrt{10}$ thì : $y_0=20-6\sqrt{10}$; $y'=6-2\sqrt{10}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y=\left(6-2\sqrt{10}\right)x-8\left(3-\sqrt{10}\right)$$

§4. ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $f:(a, b)\to\mathbf{R}$, $x_0\in(a\ ;\ b)$

Nếu f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0.

Lưu ý : Điều đảo lại của phát biểu trên là không đúng vì nếu xét f(x) = | x | thì f liên tục nhưng không có đạo hàm tại x = 0.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ : Cho hàm số f(x) xác định bởi :

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{nếu } x\le 1\\ -x^2+bx+c & \text{nếu } x>1\end{cases}$$

Tìm b, c để f(x) có đạo hàm tại x = 1.

Hướng dẫn giải

Nếu f(x) có đạo hàm tại x = 1 thì f(x) liên tục tại x = 1 nên $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$ (vì f(1) = 1)

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^+}(-x^2+bx+c)=1 \text{ (vì } x>1 \text{ thì } f(x)=-x^2+bx+c)$$

$$\Rightarrow b+c=2\Leftrightarrow b=2-c \qquad (1)$$

Ta có : $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-x^2+bx+c-1}{x-1}$

$$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-x^2+2(x-c)+c-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-(x^2-2x+1)-c(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim\limits_{x\to 1^+} [-(x-1)-c] = -c;$$

$$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2.$$

Để có đạo hàm của f(x) tại x = 1 thì phải có

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Leftrightarrow -c = 2 \Leftrightarrow c = -2$$

Và do (1) ta có b = 4.

Vậy f(x) có đạo hàm tại x = 1 khi b = 4, c = –2.

§ 5. CÔNG THỨC LAGRANGE

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số f : [a, b] → **R**. Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a ; b] và f(x) có đạo hàm trong khoảng (a ; b) thì tồn tại số c ∈ (a ; b) sao cho :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho n > 1 và b > a > 0. Chứng minh rằng :

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = x^n$, $x \in [a ; b]$ thì có $f'(x) = nx^{n-1}$.

Theo công thức Lagrange thì tồn tại c ∈ (a ; b) sao cho :

$$b^n - a^n = (b-a).nc^{n-1} \qquad (1)$$

Mà : 0 < a < c < b ; n – 1 > 0 nên :

$$a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$$

Suy ra : $na^{n-1}(b-a) < nc^{n-1}(b-a) < nb^{n-1}(b-a)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$.

Ví dụ 2 : Cho b > a > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = \ln x$, $x \in [a ; b]$. Ta có : $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Theo công thức Lagrange thì có số $c \in (a ; b)$ sao cho :

$$\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b-a}{c} \quad (1)$$

Vì $0 < a < c < b$ nên : $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$.

Ví dụ 3 : Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = \tan x$ thì $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in (a ; b)$.

Theo công thức Lagrange thì có $c \in (a ; b)$ sao cho :

$$\tan b - \tan a = (b-a)\frac{1}{\cos^2 c}$$

Ta lại có : $0 < a < c < b < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos a > \cos c > \cos b > 0$.

Suy ra : $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \frac{b-a}{\cos^2 c} < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng $\ln(1 + x) < x$ với mọi $x > 0$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(t) = \ln(1 + t)$ với $0 \le t \le x$ thì có $f'(t) = \frac{1}{1+t}$. Theo công thức Lagrange thì có $c \in (0 ; x)$ sao cho :

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{(1+x)-1}{1+c} \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c} \qquad (1)$$

Mà $0 < c < x$ nên $1 + c > 0$, do đó :

$$\frac{x}{1+c} < x \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\ln(1 + x) < x$.

Ví dụ 5 : Cho $a > 1$ và $x > 1$. Chứng minh rằng :

$$x^a - 1 > a(x-1).$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(t) = t^a$ với $1 \le t \le x$ thì $f'(t) = at^{a-1}$

Theo công thức Lagrange thì tồn tại $c \in (1 ; x)$ sao cho :

$$x^a - 1 = (x-1).ac^{a-1} \qquad (1)$$

Mà $c > 1$, $a - 1 > 0$ nên

$$c^{a-1} > 1 \Rightarrow (x-1).ac^{a-1} > a(x-1) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $x^2 - 1 > a(x-1)$.

Ví dụ 6 : Cho $m > 0$, $n > 0$ và $f(x) = 1 + x^n(1-x)^m$. Chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $f(0) = f(1) = 1$.

Theo công thức Lagrange thì có $c \in (0 ; 1)$ thoả :

$$f(1) - f(0) = (1 - 0)f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = 0$$

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $c \in (0 ; 1)$.

Ví dụ 7 : Cho hàm số :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

thoả : $$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \qquad (*)$$

Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số :

$$g(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x,\ x \in [0 ; 1]$$

Ta có : $g(0) = 0$,

$$g(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \text{ (vì (*))}$$

Theo công thức Lagrange thì tồn tại $c \in (0 ; 1)$ sao cho :

$$g(1) - g(0) = (1 - 0)g'(c) \Leftrightarrow g'(c) = 0$$

Mà $g'(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(x)$ nên suy ra $f(c) = 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Ví dụ 8 : Cho phương trình :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (*)$$

Giả sử rằng (*) có n nghiệm phân biệt. Đặt :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

a) Tính đạo hàm cấp $n - 2$ của $f(x)$.

b) Chứng minh phương trình $f^{(n-2)}(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

c) Suy ra rằng $(n - 1)a_1^2 > 2na_0a_2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}$

Ta lại có : $\left(x^k\right)^{(n-2)} = 0$, với $k = 1, 2, ..., n-3$

$$\left(x^k\right)^{(k)} = k\,!, \left(x^{k+1}\right)^{(k)} = (k+1)\,!\,x$$

$$\left(x^{k+2}\right)^{(k)} = (k+2)\,!\,\frac{x}{2}$$

Suy ra : $f^{(n-2)}(x) = a_0 n\,!\,\frac{x^2}{2} + a_1(n-1)\,!x + a_2(n-2)\,!$

b) Gọi $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ là n nghiệm của phương trình (*), ta có : $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$

Theo công thức Lagrange thì có $c_1 \in (x_1 ; x_2)$ thoả :

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c_1) \Rightarrow f'(c_1) = 0$ (vì $f(x_1) = f(x_2) = 0$)

Làm tương tự sẽ có $c_2 \in (x_2 ; x_3), \ldots, c_{n-1} \in (x_{n-1} ; x_n)$ sao cho : $f'(c_2) = \ldots = f'(c_{n-1}) = 0$.

Điều này có nghĩa là $f'(x) = 0$ có n – 1 nghiệm.

Cứ thế tiếp tục thì được : $f^{(n-2)}(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow a_1^2[(n-1)!]^2 - 2a_0 n!.a_2.(n-2)! > 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^2(n-1)!(n-1)! > 2a_0a_2.n!(n-2)!$$

$$\Leftrightarrow (n-1)a_1^2(n-2)!(n-1)! > 2a_0a_2n(n-1)!(n-2)!$$

$$\Leftrightarrow (n-1)a_1^2 > 2na_0a_2.$$

Ví dụ 9 : Cho m > 1 và các số a, b, c thoả :

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0 ; 1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m$ với $x \in [0 ; 1]$

Ta có : $f'(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}\left(ax^2 + bx + c\right)$;

$$f(0) = 0 \,;\, f(1) = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \text{ (do (1))}.$$

Theo công thức Lagrange thì tồn tại $x_0 \in (0 ; 1)$ sao cho : f(1) – f(0) = $(1-0)f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)=0$

$$\Leftrightarrow x_0^{m-1}\left(ax_0^2+bx_0+c\right)=0$$

$$\Leftrightarrow ax_0^2+bx_0+c=0 \text{ (vì } x_0 \neq 0)$$

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm là $x_0 \in (0 ; 1)$.

§6. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• **Định nghĩa :** Cho hàm số f : (a, b) → **R**

f là hàm số tăng trên (a ; b) nếu : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ với $x_1, x_2 \in (a ; b)$.

f là hàm số giảm trên (a ; b) nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ với $x_1, x_2 \in (a ; b)$.

Ta gọi chung hàm số tăng hoặc giảm là hàm số đơn điệu.

• **Định lí :**

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a ; b)$ thì f là hàm số tăng trên (a ; b)

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a ; b)$ thì f là hàm số giảm trên (a ; b)

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a ; b)$ thì f là hằng số trên (a ; b)

• **Định lí :**

Hàm số f tăng trên (a ; b) khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a ; b)$

Hàm số f giảm trên (a ; b) khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a ; b)$

(Ở đây ta không xét $f'(x) = 0, \forall x$).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm m để hàm số :

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 6(m+1)x + m^2$$

giảm trên (–2 ; 0).

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 6x^2 + 6x + 6(m+1) = 6[x^2 + x + m + 1]$

y giảm trên (–2 ; 0) khi :

$y' \le 0, \forall x \in (-2\,;0) \Leftrightarrow x^2 + x + m + 1 \le 0, \forall x \in (-2\,;0)$

$\Leftrightarrow x_1 \le -2 \le 0 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(-2) \le 0 \\ af(0) \le 0 \end{cases}$ (với $f(x) = x^2 + x + m + 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \le 0 \\ m+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -3.$$

Vậy y giảm trên (–2 ; 0) khi $m \le -1$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$

a) Tìm m để y tăng trên (1 ; ∞) ; b) Tìm m để y giảm trên (–∞ ; 0).

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = \dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$ với $x \ne -m$.

y tăng trên (1 ; ∞) khi :

$$y' > 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ -m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy y tăng trên (1 ; ∞) khi $m > 1$.

b) y giảm trên (–∞) ; 0) khi :

$$y' < 0, \forall x \in (-\infty\,;0) \Leftrightarrow \frac{m^2-1}{(x+m)^2} < 0, \forall x < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ -m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 0$$

Vậy y giảm trên (–∞ ; 0) khi $-1 < m \le 0$.

Ví dụ 3 : Tìm m để $y = x^3 + (m-1)x^2 - (2m^2 + 3m + 2)x$ tăng trên (2 ; ∞).

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 3x^2 + 2(m-1)x - (2m^2 + 3m + 2)$

$\Delta' = (m-1)^2 + 3(2m^2 + 3m + 2) = 7(m^2 + m + 1) > 0$ với mọi m.

Do đó để y tăng trên (2 ; ∞) thì :

$$y' \geq 0, \forall x \in (2;\infty) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(2) \geq 0 \\ \dfrac{s}{2} - 2 < 0 \end{cases}$$

(với $f(x) = 3x^2 + 2(m-1)x - (2m^2 + 3m + 2)$).

Ta có : $af(2) \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq m \leq 2$

$$\frac{S}{2} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{3} - 2 < 0 \Leftrightarrow -m - 5 < 0 \Leftrightarrow m > -5$$

Vậy $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 : Tìm m để $y = 2x + m\cos x$ tăng trên **R**

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 2 - m\sin x$

Để y tăng trên **R** thì :

$y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 2 - m\sin x \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow -mt + 2 \geq 0, \forall t \in [-1;1]$ (với $t = \sin x$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$ (với $f(t) = -mt + 2$) $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ -m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$

Ví dụ 5 : Tìm a để hàm số :

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \frac{3}{4}x\sin 2a$$

là đồng biến trên khoảng (–∞ ; +∞).

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = x^2 - (\sin a + \cos a)x + \dfrac{3}{4}\sin 2a$

Để y đồng biến trên **R** thì :

$y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 - 3\sin 2a \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin 2a \leq 0 \Leftrightarrow \sin 2a \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2a \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi \leq a \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 6 : Tìm m để $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$ tăng trên $(1 ; \infty)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $$y' = \frac{x^2 - 4mx + m^2}{(x - 2m)^2},\ x \neq 2m.$$

Để y tăng trên $(1 ; \infty)$ thì :

$$y' \geq 0, \forall x \in (1 ; \infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4mx + m^2 \geq 0, \forall x > 1 \\ 2m \notin (1 ; \infty) \end{cases} \quad (*)$$

Nếu $m = 0$: $(*) \Leftrightarrow x^2 \geq 0, \forall x > 1$ là thoả mãn. Hơn nữa $0 \notin (1 ; \infty)$ nên $m = 0$ là cần tìm.

Xét $m \neq 0$: Ta có $\Delta' = 4m^2 - m^2 = 3m^2 > 0$ nên :

$$(*) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 4m + 1 \geq 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 2 - \sqrt{3} \\ m \geq 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 2 - \sqrt{3}\ (m \neq 0) \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy : $m \leq 2 - \sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 7 : Tìm m để $y = \dfrac{m(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$ là hàm số đơn điệu.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = m.\dfrac{3(x+1)^2(x^2-x+1)-(x+1)^3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$$= m.\frac{(x+1)^2\left[3(x^2-x+1)-(x+1)(2x-1)\right]}{\left(x^2-x+1\right)^2} = m.\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

Với $m > 0$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên y tăng trên **R**

Với $m < 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên y giảm trên **R**

Với $m = 0$ thì $y = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên y là hàm hằng trên **R**

Vậy y là hàm số đơn điệu khi $m \neq 0$.

Ví dụ 8 : Cho $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng : $b\tan a < a\tan b$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$$

Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì : $0 < \sin x < x$ và $0 < \cos x < 1$, suy ra :

$$\sin x\cos x < x \Rightarrow x - \sin x\cos x > 0$$

Do đó : $f'(x) > 0, x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ suy ra f(x) là hàm số tăng trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên ta có :

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow \frac{\tan a}{a} < \frac{\tan b}{b} \Leftrightarrow b\tan a < a\tan b.$$

Ví dụ 9 : Cho $0 < a < u < v$ và số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng : $\sqrt[n]{v} - \sqrt[n]{u} < \sqrt[n]{v-a} - \sqrt[n]{u-a}$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-a}$ với $x \geq a$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n}(x-a)^{\frac{1}{n}-n} = \frac{1}{n}\left[x^{\frac{1}{n}-1} - (x-a)^{\frac{1}{n}-1}\right] < 0$$

(vì $x > x - a > 0$, $\frac{1}{n} - 1 < 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{n}-1} < (x-a)^{\frac{1}{n}-n}$)

Vì $f'(x) < 0, \forall x \geq a$ nên f(x) là hàm số giảm trên (a ; ∞), do đó ta có :

$0 < a < u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{u-a} > \sqrt[n]{v} - \sqrt[n]{v-a} \Leftrightarrow \sqrt[n]{v} - \sqrt[n]{u} < \sqrt[n]{v-a} - \sqrt[n]{u-a}$.

Ví dụ 10 : Cho $a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$a\sin a - b\sin b > 2(\cos b - \cos a).$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x\sin x + 2\cos x$, với $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có :

$$f'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$$

$$f''(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0 \ \left(\text{khi } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Vì $f''(x) < 0$ nên $f'(x)$ là hàm số giảm trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, do đó : với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $f'(x) < f'(0) = 0$. Từ đó lại suy ra f(x) là hàm số giảm trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có :

$0 < a < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(a) > f(b). \Rightarrow a\sin a + 2\cos a > b\sin b + 2\cos b$

$$\Rightarrow a\sin a - b\sin b > 2(\cos b - \cos a).$$

Ví dụ 11 :

a) Chứng minh rằng : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, với $x > 0$.

b) Suy ra cách tìm $\lim_{n\to\infty} S_n$ với :

$$S_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right].$$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số : $f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$, với $x > 0$. Ta có :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}>0 \text{ khi } x>0.$$

Suy ra f(x) là hàm số tăng trên (0 ; +∞), do đó ta có :

$x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$

$$\Rightarrow \ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x>0 \Rightarrow \ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$$

Xét hàm số : $g(x)=x-\ln(1+x)$, với $x>0$. Ta có :

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0, \text{ khi } x>0.$$

Suy ra g(x) là hàm số tăng trên (0 ; +∞), do đó ta có :

$$x>0 \Rightarrow g(x)>g(0)=0 \Rightarrow x-\ln(1+x)>0 \Rightarrow x>\ln(1+x)$$

Vậy ta đã chứng minh rằng với $x>0$ thì :

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

b) Ta có : $S_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

Theo kết quả của câu a) ta có :

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}.\frac{1^2}{n^4}<\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{n^2}-\frac{1}{2}.\frac{2^2}{n^4}<\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)<\frac{2}{n^2}$$

....

$$\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}.\frac{n^2}{n^4}<\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{n}{n^2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}-\frac{1}{2}.\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^4}<S_n<\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$$

Mà : $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{n}$; $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

nên ta có : $\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{12}.\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}<S_n<\frac{n+1}{2^n}$

Cho $n\to\infty$, ta được : $\frac{1}{2}-0\le\lim\limits_{n\to\infty}S_n\le\frac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 12 :

a) Chứng minh : $\ln(1 + x) < x - \ln(1 - x)$, với $0 < x < 1$.

b) Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ với $S_n = \dfrac{a}{n+a} + \dfrac{a}{n+2a} + \ldots + \dfrac{a}{n+na}$ ($a > 0$ cho trước).

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $f(x) = x - \ln(1 + x)$ với $0 < x < 1$. Ta có :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \text{ khi } x \in (0\,;\,1)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số tăng trên khoảng $(0\,;\,1)$, do đó với $0 < x < 1$ thì $f(x) > f(0) = 0$, nên ta có :

$$x - \ln(1 + x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) < x.$$

Xét hàm số : $g(x) = -\ln(1 - x) - x$, $x \in (0\,;\,1)$. Ta có :

$$g'(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} > 0 \text{ khi } 0 < x < 1.$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số tăng trên khoảng $(0\,;\,1)$, do đó với $0 < x < 1$ thì : $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow -\ln(1 - x) - x > 0 \Leftrightarrow x < -\ln(1 - x)$.

Vậy ta có : $\ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$ khi $x \in (0\,;\,1)$.

b) Với $a > 0$, $n > 0$, ta có :

$$0 < \frac{a}{n+na} < \ldots < \frac{a}{n+2a} < \frac{a}{n+a} < 1$$

Theo kết quả của câu a) thì ta có :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{n+a}\right) < \frac{a}{n+a} < -\ln\left(1 - \frac{a}{n+a}\right) = -\ln\frac{n}{n+a}$$

$$\ln\left(1 + \frac{a}{n+2a}\right) < \frac{a}{n+2a} < -\ln\left(1 - \frac{a}{n+2a}\right) = -\ln\left(\frac{n+a}{n+2a}\right)$$

....

$$\ln\left(1 + \frac{a}{n+na}\right) < \frac{a}{n+na} < -\ln\left(1 - \frac{a}{n+na}\right) = -\ln\left[\frac{n+(n-1)a}{n+na}\right]$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{n+a}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n+2a}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{a}{n+na}\right) < S_n$$

$$< -\left[\ln\frac{n}{n+a} + \ldots + \ln\frac{n+(n-1)a}{n+na}\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{n+2a}{n+a}\cdot\frac{n+3a}{n+2a}\cdots\frac{n+(n+1)a}{a+na}\right] < S_n$$

$$< -\ln\left[\frac{n}{n+a}\cdots\frac{n+(n-1)a}{n+na}\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{n+(n+1)a}{n+a}\right] < S_n < -\ln\left(\frac{n}{n+na}\right) = \ln\left(\frac{n+na}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{(1+a)n+a}{n+a}\right] < S_n < \ln\frac{(1+a)n}{n}.$$

Cho $n \to \infty$, ta được : $\ln(1+a) \le \lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \ln(1+a)$

Vậy : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln(1+a)$.

Ví dụ 13 : Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$, với $x > 0$;

b) $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3}{2}x+1}$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, với $x > 0$, n là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $f(x) = \sin x - x$. Ta có : $f'(x) = \cos x - 1 \le 0, \forall x$ do đó f(x) là hàm số giảm nên ta có :

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \sin x - x < 0 \Rightarrow \sin x < x.$$

Xét : $g(x) = \sin x + \frac{1}{6}x^3 - x$, với $x > 0$. Ta có :

$$g'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \; ; \; g''(x) = x - \sin x$$

Theo chứng minh trên thì $g''(x) > 0, \forall x > 0$ nên $g'(x)$ là hàm số tăng trên $(0 ; \infty)$, do đó :

Với $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0 \Rightarrow \sin x > x - \frac{1}{6}x^3.$$

Vậy : $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$ khi $x>0$.

b) Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$2^{2\sin x}+2^{\tan x}\ge 2\sqrt{2^{2\sin x}.2^{\tan x}}=2.2^{\frac{2\sin x+\tan x}{2}} \quad (1)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh rằng :

$$2.2^{\frac{1}{2}(2\sin x+\tan x)}>2^{\frac{3}{2}x+1} \quad (2)$$

Ta lại có : (2) $\Leftrightarrow 2\sin x+\tan x>3x$

$\Leftrightarrow 2\sin x+\tan x-3x>0$ (3)

Đặt hàm số : $h(x)=2\sin x+\tan x-3x$, với $0<x<\frac{\pi}{2}$. Ta có :

$$h'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3$$

Ta có : $2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\ge 3\sqrt[3]{\cos x.\cos x.\frac{1}{\cos^2 x}}=3$

nên $h'(x)\ge 0, \forall x\in\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ do đó h(x) là hàm số tăng trên khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ nên ta được :

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow h(x)>h(0)=0.\Rightarrow 2\sin x+\tan x-3x>0.$$

Điều này chứng tỏ (3) là đúng và suy ra (2) đúng.

Từ (1) và (2) ta suy ra rằng :

$$2^{2\sin x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3}{2}x+1}$$

c) Ta dùng phương pháp quy nạp như sau :

Với n = 1 : Bài toán trở thành

$$e^x>1+x\Leftrightarrow e^x-1-x>0\ . \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x)=e^x-1-x$, $x>0$. Ta có : $f'(x)=e^x-1>0$ (vì $x>0\Rightarrow e^x>e^0=1\Rightarrow e^x-1>0$) suy ra f(x) là hàm số tăng trên $(0\,;+\infty)$ nên : $x>0$ thì $f(x)>f(0)=0\Rightarrow e^x>1+x$.

Giả sử $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ đúng (1). Ta cần chứng minh :

$$e^x>1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2)$$

Đặt : $g(x) = e^x - (1 + x + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})$. Ta có :

$$g'(x) = e^x - \left(1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) > 0 \text{ (do (1))}$$

Suy ra g(x) là hàm số tăng trên x > 0, do đó với x > 0 thì g(x) > g(0) = 0 ⇒ (2) đúng.

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi n > 0.

§7. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• **Định nghĩa :** Cho hàm số f : (a ; b) → **R**, $x_0 \in (a ; b)$

+ Hàm số f đạt cực đại tại x_0 khi có một lân cận V của x_0 sao cho $f(x_0) \geq f(x)$ với mọi $x \in V$.

+ Hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 khi có một lân cận V của x_0 sao cho $f(x_0) \leq f(x)$ với mọi $x \in V$.

+ Ta gọi chung cực đại hay cực tiểu là cực trị.

• **Các định lí :**

Định lí 1 : Nếu f(x) đạt cực trị tại x_0 và có $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Định lí 2 : Nếu đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (–) khi x đi qua x_0 thì hàm số f(x) đạt cực đại tại x_0..

Nếu đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ âm (–) sang dương (+) khi x đi qua x_0 thì hàm số f(x) đạt cực điểm tại x_0..

Nhận xét : f(x) đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0.

Định lí 3 : Cho f : (a ; b) → **R** có đạo hàm cấp hai.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì f(x) đạt cực đại tại x_0.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại x_0.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 2x^2$;

b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$;

c) $y = x\sqrt{1 - x^2}$;

d) $y = x + \sqrt{1 - x}$;

e) $y = x + \sqrt{3x^2 + 1}$;

g) $y = \frac{x}{2} - \sin x$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Vậy : y đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$.

y đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = -1$; $x = -1$,

b) $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y		↘		↘	CT	↗	

Vậy y đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

c) Miền xác định : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đạo hàm $y' = \sqrt{1-x^2} + x.\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'		-	0	+	0	-	
y		↘	CT	↗	CĐ	↘	

Vậy : y đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{CT} = -\dfrac{1}{2}$;

y đạt cực đại tại $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{CĐ} = \dfrac{1}{2}$.

d) Miền xác định : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Đạo hàm : $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1
y'		+	0	-	
y		↗	CĐ	↘	

Vậy y đạt cực đại tại $x = \dfrac{3}{4}$, $y_{CĐ} = \dfrac{5}{4}$.

e) $y' = 1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}+3x}{\sqrt{3x^2+1}}$, $x \in \mathbf{R}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 9x^2 \ (x < 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \ (x < 0) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y		↘	CT	↗	

Vậy y đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y_{CT} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

g) Ta có : $y' = \frac{1}{2} - \cos x$; $y'' = \sin x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Tại $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ thì $y'' = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ nên y đạt cực tiểu.

Tại $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ thì $y'' = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ nên y đạt cực đại.

Ví dụ 2 : Tìm m để $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + m$ đạt cực đại tại x = 2.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 3mx^2 + 6x + 5$, $y'' = 6mx + 6$

Nếu y đạt cực đại tại x = 2 thì :

$$y'(2) = 0 \Leftrightarrow 12m + 17 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{12}$$

Lúc đó : $y''(2) = 6.\left(-\frac{17}{12}\right).2 + 6 = -11 < 0$

Vậy : $m = -\frac{17}{12}$ thì y đạt cực đại tại x = 2.

Ví dụ 3 : Tìm m để $y = -m^2x^2 + 2mx - 3m + 2$ đạt cực đại có giá trị bằng –3.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = -2m^2x + 2m$; $y'' = -2m^2$.

Tại cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow 2m^2x = 2m \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}$ (với $m \neq 0$)

Lúc đó : $y = -m^2 \times \frac{1}{m^2} + 2m \times \frac{1}{m} - 3m + 2 = 3 - 3m.$

Theo đề bài thì : $3 - 3m = -3 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi ấy ta có : $y'' = -2.4 = -8 < 0$ nên y đạt cực đại.

Vậy m = 2 thì y đạt cực đại có giá trị bằng −3.

Ví dụ 4 : Tìm a, b để hàm số $y = a\ln x + bx^2 + x$ đạt cực đại tại x = 2 và đạt cực tiểu tại x = 1.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 1$; $y'' = -\frac{a}{x^2} + 2b$, với $x > 0$

y đạt cực đại tại x = 2 nên : $y'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a + 8b + 2 = 0$ (1)

y đạt cực tiểu tại x = 1 nên : $y'(1) = 0 \Leftrightarrow a + 2b + 1 = 0$ (2)

Từ (1) và (2), ta được : $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}$.

Với $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}$ thì ta có :

$$y''(1) = -a + 2b = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 ;$$

$$y''(2) = -\frac{a}{4} + 2b = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0$$

nên y đạt cực tiểu tại x = 1, đạt cực đại tại x = 2.

Vậy $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + mx + 1$

a) Tìm m để y có cực đại và cực tiểu.

b) Tìm m để y có cực đại và cực tiểu tại các điểm có x > m.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = x^2 + x + m$

Hàm số y có cực đại và cực tiểu khi đạo hàm y' đổi dấu 2 lần, do đó $\Delta = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

b) Hàm số y đạt cực đại và cực tiểu tại x > m khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm thoả $x_1 > x_2 > m$, do đó :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(m) > 0 \text{ (trong đó } f(x) = x^2 + x + m) \\ \frac{S}{2} - m > 0 \end{cases}$$

Ta có : $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$;

$$af(m) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{S}{2} - m > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$$

Vậy hệ thống trên cho ta : $m < -2$.

Ví dụ 6 : Tìm m để $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ đạt cực tiểu tại x = 2.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \frac{x^2 - 2x - (2 + m)}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$. Hàm số y đạt cực tiểu tại x = 2 nên :

$y'(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 - (2 + m) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Lúc đó : $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y		↗	CĐ	↘	||	↘	CT	↗	

Vậy $m = -2$ thì y đạt cực tiểu tại x = 2.

Ví dụ 7 : Tìm a, b để hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + ab}{bx + a}$ đạt cực trị tại x = 0 và tại x = 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \dfrac{abx^2 + 2a^2x + ab(1 - b)}{(bx + a)^2}$ với bx + a ≠ 0. Hàm số y đạt cực trị tại x = 0 và tại x = 4 nên :

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ab(1 - b)}{a^2} = 0 & (1) \\ \dfrac{16ab + 8a^2 + ab(1 - b)}{(4b + a)^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có :

* $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right. (a \neq 0)$

* Với b = 0 thì (2) cho : $\dfrac{8a^2}{a^2} = 0$ (trái với điều kiện a ≠ 0)

* Với b = 1 thì (2) cho : $\dfrac{8a^2 + 16a}{(a + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow a = -2$ (vì a ≠ 0)

* Với a = −2, b = 1 thì $y' = \dfrac{-2x^2 + 8x}{(x - 2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 4$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	||	+	0	-	
y		↘	CT	↗	||	↗	CĐ	↘	

Kết luận : a = −2, b = 1 thì y đạt cực trị tại x = 0 và tại x = 4.

Ví dụ 8 : Cho hàm số $y = x^4 + 8mx^3 + 3(1 + 2m)x^2$. Tìm m để y chỉ có cực tiểu và không có cực đại.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 4x^3 + 24mx^2 + 6(1 + 2m)x = 2x\left[2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)\right]$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)$. Ta có :

$$\Delta' = 36m^2 - 6(1 + 2m) = 6(6m^2 - 2m - 1)$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 6m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{7})$$

• Với $\frac{1}{6}(1 - \sqrt{7}) \le m \le \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7})$ thì $\Delta' \le 0$ nên $f(x) \ge 0$ với mọi x và do đó y' theo dấu của 2x, ta có :

x	-∞		0		+∞
y'		-	0	+	
y		↘	CT	↗	

• Với $m = -\frac{1}{2}$ thì $y' = 2x(2x^2 - 6x) = 4x^2(x - 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

x	-∞		0		3		+∞
y'		-	0	-	0	+	
y		↘		↘	CT	↗	

• Với $m < \frac{1}{6}(1 - \sqrt{7}) \vee m > \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7}),\ m \ne -\frac{1}{2}$

Lúc đó $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên y' đổi dấu 3 lần, và do đó hàm số y có cực đại và cực tiểu.

Vậy, để y chỉ có cực tiểu và không có cực đại thì :

$$m = -\frac{1}{2} \text{ hay } m < \frac{1}{6}(1 - \sqrt{7}) \vee m > \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7}).$$

Ví dụ 9 : Tìm m > 0 để $y = \frac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$ đạt cực tiểu tại $x \in (0\ ;\ 2m)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \frac{x^2 - (2m^2 - 5m + 3)}{x^2},\ x \ne 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^2 = 2m^2 - 5m + 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2m^2 - 5m + 3} \text{ (với } 2m^2 - 5m + 3 > 0)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2m^2-5m+3}$		0		$\sqrt{2m^2-5m+3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y		↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	

Để y đạt cực tiểu trong khoảng (0 ; 2m) thì :

$$0<\sqrt{2m^2-5m+3}<2m \Leftrightarrow \begin{cases}2m^2-5m+3<4m^2\\2m^2-5m+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m^2+5m-3>0\\2m^2-5m+3>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>\frac{1}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m<1\\m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<m<1\\m>\frac{3}{2}\end{array}\right. \quad \text{(vì } m>0)$$

Vậy y đạt cực tiểu trong (0 ; 2m) khi $\frac{1}{2}<m<1$ hay $m>\frac{3}{2}$.

Ví dụ 10 : Cho hàm số $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ với $a<b<c$.

Chứng minh rằng y đạt cực đại tại $x\in(a;b)$ và cực tiểu tại $x\in(b;c)$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, ta có :

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c);$$

$$f'(a)=(a-b)(a-c)>0 \text{ (vì } a-b<0;\ a-c<0);$$

$$f'(b)=(b-a)(b-c)<0 \text{ (vì } b-a>0;\ b-c<0);$$

$$f'(c)=(c-a)(c-b)>0 \text{ (vì } c-a>0;\ c-b>0).$$

Vì $f'(a).f'(b)<0$ và $f'(b).f'(c)<0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x_1\in(a;b)$ và nghiệm $x_2\in(b;c)$, do đó :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	CĐ	↘	CT	↗	

($f'(x)$ là tam thức bậc 2 có hệ số $a > 0$).

Vậy y đạt cực đại tại $x_1 \in (a ; b)$, đạt cực tiểu tại $x_2 \in (b ; c)$.

Ví dụ 11 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$.

a) Tìm m để hàm số y có cực trị.

b) Gọi $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$ là hai điểm cực trị. Chứng minh rằng : $y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = 3x^2 - 6x + 3m = 3(x^2 - 2x + m)$

Để y có cực trị thì y' phải đổi dấu, tức là $x^2 - 2x + m$ đổi dấu, do đó $\Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

b) Tại cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$.

Theo Viét, ta có : $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = m$ (*)

Ta có : $y_1 - y_2 = x_1^3 - 3x_1^2 + 3mx_1 + 1 - m - (x_2^3 - 3x_2^2 + 3mx_2 + 1 - m)$

$$= (x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 3m(x_1 - x_2)$$

$$= (x_1 - x_2)\left[x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3m\right]$$

$$= (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3m\right]$$

$$= (x_1 - x_2)[4 - x_1x_2 - 6 + 3x_1x_2] \text{ (do (*))}$$

$$= (x_1 - x_2)(2x_1x_2 - 2) = 2(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1).$$

Ví dụ 12 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$

a) Tìm m để y đạt cực tiểu tại $x = 2$.

b) Tìm m để y đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Tìm m để điểm cực tiểu thuộc đồ thị (P) : $y = x^2 + x - 4$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - (m + 2)}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$

y đạt cực tiểu tại x = 2 nên : $y'(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 - (m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó : $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	

Vậy y đạt cực tiểu tại x = 2 khi m = −2.

b) y đạt cực đại tại x = −1 thì :

$$y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - (m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Khi đó : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	

Vậy y đạt cực đại tại x = −1 khi m = 1.

c) y có cực trị khi y' đổi dấu, tức là $x^2 - 2x - (m + 2)$ đổi dấu, do đó : $\Delta' = 1 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (m + 2) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{m + 3}.$$

Ta có :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y		↗	CĐ	↘	‖	↘	CT	↗	

Suy ra y đạt cực tiểu tại : $x = 1 + \sqrt{m + 3}$,

$$y_{CT} = 2\left(1 + \sqrt{m + 3}\right) + m.$$

Để điểm cực tiểu thuộc đồ thị (P) thì phải có :

$$2\left(1 + \sqrt{m + 3}\right) + m = \left(1 + \sqrt{m + 3}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{m + 3}\right) - 4 \qquad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{m+3} = 1 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy m = –2 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 13 : Tìm m để $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + 1 - m}{x - m}$ có 2 điểm cực trị ở hai bên trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - (m^2+1)}{(x-m)^2}$, $x \neq m$

Tại cực trị thì $y' = 0$ nên $x^2 - 2mx - (m^2+1) = 0$ (*)

(*) luôn có 2 nghiệm vì $\Delta' = m^2 + m^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Theo công thức Viet thì :

$$x_1 + x_2 = 2m,\ x_1x_2 = -(m^2+1) \quad (1)$$

Tại cực trị thì y = 2x + (m + 1) nên ta có :

$$y_1.y_2 = [2x_1 + (m+1)].[2x_2 + (m+1)]$$

$$= 4x_1x_2 + 2(m+1)(x_1+x_2) + (m+1)^2$$

$$= -4(m^2+1) + 4m(m+1) + (m+1)^2 \text{ (do (1))}$$

$$= m^2 + 6m - 3$$

Để hai điểm cực trị ở hai bên trục Ox thì :

$$y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 - 2\sqrt{3} < m < -3 + 2\sqrt{3}$$

Vậy : $-3 - 2\sqrt{3} < m < -3 + 2\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 14 : Cho n là số nguyên dương. Tìm cực trị của hàm số $y = x^n(x-2)^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = nx^{n-1}.(x-2)^2 + 2x^n(x-2) = x^{n-1}(x-2)[n(x-2) + 2x]$

Có hai trường hợp xảy ra :

Trường hợp 1 : n là số nguyên chẵn.

Lúc đó n − 1 là lẻ nên x^{n-1} cùng dấu với x và y' theo dấu của $x(x-2)[(n+2)x-2n]$.

Với $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=\dfrac{2n}{n+2} \end{array}\right.$, ta có :

x	$-\infty$		0		$\frac{2n}{n+2}$		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy, y đạt cực tiểu tại x = 0 và x = 2 ứng với $y_{CT}=0$;

y đạt cực đại tại $x=\frac{2n}{n+2}$, $y_{CĐ}=\left(\frac{2n}{n+2}\right)^n\frac{16}{(n+2)^2}$

Trường hợp 2 : n là số nguyên lẻ.

Lúc đó n − 1 là số chẵn nên $x^{n-1}\ge 0$ với mọi x, và do đó y' theo dấu của $(x-2)[(n+2)(x-2)]$

Vì $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2n}{n+2} \end{array}\right.$ nên ta có :

x	$-\infty$		$\frac{2n}{n+2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy, y đạt cực tiểu tại x = 2, $y_{CT}=0$;

y đạt cực đại tại $x=\frac{2n}{n+2}$, $y_{CĐ}=\left(\frac{2n}{n+2}\right)^n\frac{16}{(n+2)^2}$

Ví dụ 15 : Cho số tự nhiên $n\ge 2$ và số thực $a>0$. Hãy tìm cực trị của hàm số $y=x^n+(a-x)^n$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = nx^{n-1} - n(a-x)^{n-1} = n[x^{n-1} - (a-x)^{n-1}]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^{n+1} = (a-x)^{n-1} \qquad (*)$$

* Nếu n là số tự nhiên lẻ : (*) $x = \pm(a-x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$;

* Nếu n là số tự nhiên chẵn : (*) $x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Do đó (*) luôn có một nghiệm duy nhất là $x = \frac{a}{2}$. Mặt khác, ta có :

$y'' = n(h-1)\left[x^{n-2} + (a-x)^{n-2}\right]$. Tại $x = \frac{a}{2}$ thì :

$$y''\left(\frac{a}{2}\right) = n(n-1)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}\right] > 0$$

Vậy y đạt cực tiểu tại $x = \frac{a}{2}$, $y_{CT} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

Ví dụ 16 : Tìm m để hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 2m}{x-4}$ có cực đại và cực tiểu thoả $y_{CT} = 4 + y_{CĐ}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \dfrac{-x^2 + 8x - (12+2m)}{(x-4)^2}$, $x \neq 4$.

Tại cực trị thì $y' = 0$ nên $x^2 - 8x + 12 + 2m = 0$ (*)

y có cực đại và cực tiểu khi (*) có $\Delta' = 16 - (12 + 2m) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0$ $\Leftrightarrow m < 2$. Khi đó : (*) có 2 nghiệm là $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4-2m}$.

x	$-\infty$		x_1		4		x_2		$+\infty$
y'		-	0	+	||	+	0	-	
y		↘	CT	↗	||	↗	CĐ	↘	

Suy ra y đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2.

Tại cực trị thì $y = -2x + 3$ nên :

$$y_{CT} = y(x_1) = -2x_1 + 3,\ y_{CĐ} = y(x_2) = -2x_2 + 3.$$

Do đó : $y_{CT} = 4 + y_{CĐ} \Leftrightarrow -2x_1 + 3 = 4 - 2x_2 + 3 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2$

$$\Leftrightarrow \left(4 + \sqrt{4 - 2m}\right) - \left(4 - \sqrt{4 - 2m}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - 2m} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Vậy $m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 17 : Cho hàm số :

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \frac{3}{4}x\sin 2a$$

a) Tìm a để hàm số y có cực đại và cực tiểu.

b) Tìm a để $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2$, trong đó x_1, x_2 là hoành độ của 2 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = x^2 - (\sin a + \cos a)x + \frac{3}{4}\sin 2a.$

Để y có cực đại và cực tiểu thì đạo hàm y' đổi dấu 2 lần, do đó phải có :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 - 3\sin 2a > 0 \Leftrightarrow 1 + \sin 2a - 3\sin 2a > 0 \Leftrightarrow \sin 2a < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k2\pi + \frac{5\pi}{6} < 2a < \frac{13\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow k\pi + \frac{5\pi}{12} < 2a < \frac{13\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

b) Tại cực trị thì : $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sin a + \cos a)x + \frac{3}{4}\sin 2a = 0$

Theo Viet, ta có :

$$x_1 + x_2 = \sin a + \cos a\ ;\ x_1x_2 = \frac{3}{4}\sin 2a.$$

Theo đề bài, ta có :

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 - \frac{3}{2}\sin 2a = \sin a + \cos a$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin 2a = \sin a + \cos a$$

Đặt : $t = \sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$; $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 + \sin 2a$, nên phương trình trên trở thành :

$$1 - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = t$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ a = k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbf{Z} \text{ thoả điều kiện câu a.}$$

Kết luận : $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $a = k2\pi$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 18 : Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2m}{x - 2m}$. Tìm m để y có cực đại và cực tiểu thoả $|y_{CĐ} - y_{CT}| > 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \frac{2x^2 - 8mx + 4m}{(x - 2m)^2}$, $x \ne 2m$

y có cực đại và cực tiểu khi y' đổi dấu 2 lần, tức là : $2x^2 - 8mx + 4m$ đổi dấu 2 lần, do đó ta có :

$$\Delta' = 16m^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Tại cực trị thì $y' = 0$ nên : $x^2 - 4mx + 2m = 0$.

Theo Viet, ta có : $x_1 + x_2 = 4m$; $x_1x_2 = 2m$.

Hơn nữa, tại cực trị thì $y = 4x - 3$ nên suy ra :

$$|y_{CĐ} - y_{CT}| > 8 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| > 8 \Leftrightarrow |4x_1 - 3 - (4x_2 - 3)| > 8$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 4$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 - 8m - 4 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \\ m > \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \end{array}\right.$$

(thoả $m < 0 \vee m > \frac{1}{2}$)

Vậy $m < \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right) \vee m > \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 19 : Cho hàm số $y = x^3 + 3(1-m)x^2 + 9(m-2)x$. Tìm m để y có cực đại và cực tiểu thoả $x_{CĐ} + 2x_{CT} = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 3x^2 + 6(1-m)x + 9(m-2) = 3\left[x^2 + 2(1-m)x + 3(m-2)\right]$

Tại cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x + 3(m-2) = 0$.

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của điểm cực đại, cực tiểu. Theo đề bài, ta có :

$$x_1 + 2x_2 = 1 \qquad (1)$$

Theo Viet, ta lại có :

$$x_1 + x_2 = 2(m-1) \qquad (2)$$

$$x_1.x_2 = 3(m-2) \qquad (3)$$

Giải (1) và (2) ta được : $x_1 = 4m-5$; $x_2 = 3-2m$.

Thế x_1, x_2 vào (3), ta được :

$$(4m-5)(3-2m) = 3(m-2) \Leftrightarrow 8m^2 - 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{16}\left(19 \pm 3\sqrt{7}\right)$$

Điều kiện để hàm số y có cực đại và cực tiểu là :

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 3(m-2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 7 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbf{R}$

Do tính chất dấu của y' nên ta có :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 4m - 5 < 3 - 2m \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}.$$

Vậy $m = \frac{1}{16}\left(19 - 3\sqrt{7}\right)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 20 : Cho hàm số :

$$y = \frac{2}{3}x^3 + (\cos a - 3\sin a)x^2 - 8(1+\cos 2a)x$$

Chứng minh rằng với mọi a thì y luôn có cực đại và cực tiểu thoả điều kiện : $x_{CĐ}^2 + x_{CT}^2 \le 18$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 2x^2 + 2(\cos a - 3\sin a)x - 8(1+\cos 2a)$

Và : $\Delta' = (\cos a - 3\sin a)^2 + 8(1+\cos 2a)$

$$= (\cos a - 3\sin a)^2 + 16\cos^2 a \geq 0, \text{ với mọi } a \in \mathbf{R}$$

Hơn nữa, nếu $\Delta' = 0$ thì

$$\begin{cases} \cos a - 3\sin a = 0 \\ \cos^2 a = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos a = \sin a = 0$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó $\Delta' > 0, \forall a \in \mathbf{R}$. Suy ra hàm số y luôn có cực đại và cực tiểu.

Ngoài ra hoành độ của cực trị thoả :

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\cos a - 3\sin a)x - 4(1+\cos 2a) = 0$$

Theo Viet, ta có :

$$x_1 + x_2 = 3\sin a - \cos a \text{ ; } x_1x_2 = -4(1+\cos 2a)$$

Do đó : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= (3\sin a - \cos a)^2 + 8(1+\cos 2a)$$

$$= 9\sin^2 a + \cos^2 a - 3\sin 2a + 8(1+\cos 2a)$$

$$= \frac{9}{2}(1-\cos 2a) + \frac{1}{2}(1+\cos 2a) - 3\sin 2a + 8(1+\cos 2a)$$

$$= 13 + 4\cos 2a - 3\sin 2a$$

Theo bất đẳng thức Schwartz thì :

$$4\cos 2a - 3\sin 2a \leq \sqrt{(16+9)(\cos^2 2a + \sin^2 2a)} = 5$$

Suy ra : $x_1^2 + x_2^2 \leq 13 + 5 = 18$.

Vậy y luôn có cực đại, cực tiểu và thoả $x_{CĐ}^2 + x_{CT}^2 \leq 18$.

Ví dụ 21 : Tìm m để hàm số $y = 2x + m\sqrt{2x^2+1}$ đạt cực tiểu (cực đại).

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 2 + m.\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$,

$$y'' = m \times \frac{1\sqrt{2x^2+1} - \frac{4x^2}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = m \times \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$$

Hàm số đạt cực tiểu khi hệ thống sau có nghiệm.

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx = -2\sqrt{2x^2+1} \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2x^2 = 2x^2+1 \\ m > 0,\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-2)x^2 - 1 = 0 \\ m > 0,\ x < 0 \end{cases}$$

Để hệ trên có nghiệm x < 0 thì chỉ cần :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vì m > 0 nên chỉ nhận $m > \sqrt{2}$.

Vậy y có cực tiểu khi $m > \sqrt{2}$.

Hàm số đạt cực đại khi hệ thống sau có nghiệm :

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -\sqrt{2x^2+1} \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2x^2 = 2x^2+1 \\ m < 0,\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-2)x^2 - 1 = 0 \\ m < 0,\ x > 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi :

$$\Delta' = (m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vì m < 0 nên chỉ nhận $m < -\sqrt{2}$.

Vậy y có cực đại khi $m < -\sqrt{2}$.

Ví dụ 22 : Cho hàm số :

$$y = \frac{2mx^2 + 1(1+4m^2)x + 2m + 32m^3}{x + 2m}$$

Tìm m để hàm số y có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ hai và điểm cực trị kia thuộc góc phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \dfrac{2mx^2 + 8m^2x - 24m^3}{(x+2m)^2}$, $x \neq -2m$

Để y có cực đại và cực tiểu thì y' đổi dấu 2 lần, nên :

$$\Delta' = 16m^4 + 18m^4 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Tại cực trị thì :

$$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 + 4m^2x - 12m^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4mx - 12m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2m \\ x_2 = -6m \end{array}\right.$$

Ta lại có, tại cực trị thì $y = 4mx + (1 + 4m^2)$ nên :

$$y_1 = 8m^2 + 1 + 4m^2 = 12m^2 + 1 > 0$$

$$y_2 = -24m^2 + 1 + 4m^2 = 1 - 20m^2$$

Do đó theo đề bài thì điểm cực trị $M(x_1 ; y_1)$ phải thuộc góc phần tư thứ hai ; còn điểm cực trị $N(x_2 ; y_2)$ thuộc góc phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ. Do đó ta phải có :

$$\begin{cases} x_1 < 0 \\ y_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ y_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m < 0 \\ 12m^2 + 1 > 0 \\ -6m > 0 \\ 1 - 20m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 - 20m^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ m > \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$$

Vậy $m < -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ là giá trị cần phải tìm.

§ 8. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

Cho hàm số $f : D \to \mathbf{R}$

f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \to \mathbf{D}$ nếu $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D$

f đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \to \mathbf{D}$ nếu $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$

2. Cách tìm giá trị lớn nhất (max) – Giá trị nhỏ nhất (min) :

+ Nếu D là một đoạn [a ; b] :

– Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, \ldots, x_n$ thuộc D (các nghiệm không thuộc D bị loại).

– Tính các giá trị $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ và f(a), f(b).

Số lớn nhất trong các giá trị trên là f_{max} ;

Số lớn nhất trong các giá trị trên là f_{min}.

+ Nếu D không là một đoạn [a ; b] :

Xét sự biến thiên của f rồi từ đó suy ra f_{max}, f_{min}.

Lưu ý : Ngoài cách tìm max, min nêu trên ta còn có thể giải bài toán này bằng cách dùng miền giá trị của hàm số hoặc sử dụng bất đẳng thức.

3. Ứng dụng :

$f(x) \geq a, \forall x \in D$ khi và chỉ khi $f_{min} \geq a$;

$f(x) \leq a, \forall x \in D$ khi và chỉ khi $f_{max} \leq a$;

Bất phương trình f(x) > a vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \leq a, \forall x \in D_f \Leftrightarrow f_{max} \leq a$.

Bất phương trình f(x) < a vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq a, \forall x \in D_f \Leftrightarrow f_{min} \geq a$.

Bất phương trình f(x) > a có nghiệm $\Leftrightarrow f_{max} > a$.

Bất phương trình f(x) < a có nghiệm $\Leftrightarrow f_{min} < a$.

(Trong phần trên ta giả sử tồn tại f_{max}, f_{min}).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của :

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với $x \in [0 ; 2]$;

b) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$ với $x \in [-1 ; 2]$;

c) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ với $1 < x < +\infty$;

d) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x-1}$ với $0 \le x < 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 9$. Vậy $f_{max} = 9$; $f_{min} = 0$.

b) $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$f(0) = 2$; $f(1) = 3$; $f(-1) = -$[illegible] 6. Vậy $f_{min} = -9$; $f_{max} = 3$.

c) Ta có : $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$

x	1		$+\infty$
y'	‖	–	
y	‖ $+\infty$	↘	2

Vậy không tồn tại f_{max}, f_{min}.

d) $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{6}$

x	0		1
y'		-	‖
y	-3	↘	$-\infty$ ‖

Vậy $y_{max} = -3$; y_{min} không tồn tại.

Ví dụ 2 : Cho $y = x^2 - 2m + 1$ với $x \in [0 ; 1]$. Tìm và biện luận theo m giá trị lớn nhất của y.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

i) Xét $m \le 0$: $y' \ge 0$ với $x \in [0 ; 1]$ nên :

x	0		1
y'		+	
y	1	↗	2 - 2m

Vậy $y_{min} = 1$; $y_{max} = 2 - 2m$.

ii) Xét $0 < m < 1$: Ta có bảng biến thiên của y

x	0		m		1
y'		-	0	+	
y	1	↘	$1 - m^2$	↗	2 - 2m

Ta có : $y_{min} = 1 - m^2$

Ta xét : $f(0) - f(1) = 1 - (2 - 2m) = 2m - 1$

Nếu $0 < m < \frac{1}{2}$ thì $2m - 1 < 0 \Rightarrow f(0) < f(1) \Rightarrow f_{max} = f(1) = 2 - 2m$

Nếu $\frac{1}{2} \le m < 1$ thì $2m - 1 \ge 0 \Rightarrow f(0) \ge f(1) \Rightarrow f_{max} = f(0) = 1$.

iii) Xét $m \ge 1$. Ta có :

x	0		1
y'		-	
y	1	↘	2 - 2m

Vậy $y_{max} = 1$, $y_{min} = 2 - 2m$.

Ví dụ 3 : Tìm a, b để hàm số $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất là -1.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (1 - y)x^2 + ax + b - y = 0$ (*)

Với $y \neq 1$ thì (*) có nghiệm khi :

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(1 - y)(b - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4(b + 1)y + 4b - a^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b + 1 - \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}) \leq y \leq \frac{1}{2}[b + 1 + \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}]$$

Do đó theo đề bài, ta phải có :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[b + 1 - \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}\right] = -1 \\ \frac{1}{2}\left[b + 1 + \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}\right] = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$ với $x \in [-2 ; 1]$. Tìm và biện luận theo m giá trị lớn nhất của y.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y = t^2 - 6mt + m^2$ với $t = x^2 (-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4)$

Vì y là hàm số chẵn theo biến số x nên :

$$\max_{x \in [-2 ; 1]} y = \max_{x \in [-2 ; 2]} y = \max_{t \in [0 ; 4]} y$$

Xét : $y = t^2 - 6mt + m^2 = f(t)$, $0 \leq t \leq 4$.

$$f'(t) = 2t - 6m = 0 \Leftrightarrow t = 3m$$

i) Xét $3m \leq 0$:

Lúc đó $f'(t) \geq 0, \forall t \in [0 ; 4]$ nên f(t) là hàm số tăng và ta có $f_{max} = f(4) = m^2 - 24m + 16$.

ii) Xét $0 < 3m < 4 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$:

Lúc đó có bảng biến thiên như sau :

x	0		3m		4
f'(t)		-	0	+	
f(t)	m^2	↘	CT	↗	$m^2 - 16m + 24$

Xét f(0) – f(4) = 16 – 24m. Ta có :

m	0		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$
f(0) - f(t)		-	0	+	

Nếu $0 < m < \frac{2}{3}$ thì f(0) < f(4) nên :

$$f_{max} = f(4) = m^2 - 2m + 16$$

Nếu $\frac{2}{3} < m < \frac{4}{3}$ thì f(0) ≥ f(4) nên :

$$f_{max} = f(0) = m^2$$

iii) Xét $3m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}$:

Lúc đó $f'(t) \leq 0, \forall x \in [0 ; 4]$ nên f(t) là hàm số giảm và ta có $f_{max} = f(0) = m^2$.

Kết luận : $f_{max} = \begin{cases} m^2 & \text{nếu } m \geq \frac{2}{3} \\ m^2 - 24m + 16 & \text{nếu } m < \frac{2}{3}. \end{cases}$

Ví dụ 4 : Cho hàm số : $y = \frac{x^2 - (a-1)x + a^2}{x}$ với $0 < x \leq \sqrt{a^2 - a + 1}$.

Tìm max và min của y. Biện luận theo tham số a.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = \frac{x^2 - a^2}{x^2}, x \neq 0$

i) với a = 0 thì $y = \dfrac{x^2 + x}{x} = x + 1$ (với $0 < x \le 1$).

Tạ có : $y_{max} = 2$, y_{min} không tồn tại (vì y không xác định tại x = 0).

ii) Với $a < 0$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

Do $a < 0$ nên $\sqrt{a^2 - a + 1} > \sqrt{a^2} = -a$ và ta có :

$$a < 0 < -a < \sqrt{a^2 - a + 1}$$

nên y có bảng biến thiên :

x	0		-a		$\sqrt{a^2 - a + 1}$
y'	‖	−	0	+	
y	‖ +∞	↘	1 - 3a	↗	

Ta có : $y_{min} = 1 - 3a$, y_{max} không tồn tại (vì $y \to \infty$ khi $x \to 0^+$)

iii) Với $0 < a < 1$ thì có

$$\sqrt{a^2 - a + 1} = \sqrt{a^2 + (1 - a)} > \sqrt{a^2} = a$$

nên y có bảng biến thiên :

x	0		a		$\sqrt{a^2 - a + 1}$
y'	‖	-	0	+	
y	‖ +∞	↘	1 + a	↗	

Suy ra $y_{min} = 1 + a$, y_{max} không tồn tại (vì $y \to \infty$ khi $x \to 0^+$)

iv) Với $a \ge 1$ thì $\sqrt{a^2 - a + 1} = \sqrt{a^2 + (1 - a)} \le \sqrt{a^2} = a$ nên :

x	0	$\sqrt{a^2 - a + 1}$	a
y'	‖	−	0
y	‖ +∞	↘	

Vậy : y_{max} không tồn tại ;

$$y_{min} = f\left(\sqrt{a^2 - a + 1}\right) = \frac{2a^2 - a + 1 - (a - 1)\sqrt{a^2 - a + 1}}{\sqrt{a^2 - a + 1}}.$$

Ví dụ 5 : Cho $y = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y. Biện luận theo tham số m.

Hướng dẫn giải

$y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + m\sin x\cos x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$

Đặt : $t = \sin 2x$ thì $-1 \le t \le 1$ và $y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t + 1$

$$y' = -t + \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m}{2}$$

i) Với $m \le -2$ (tức $\frac{m}{2} \le -1$) thì ta có :

t	-1		1
y'		-	
y	$\frac{1-m}{2}$	↘	$\frac{1+m}{2}$

Vậy : $y_{min} = \frac{1+m}{2}$; $y_{max} = \frac{1-m}{2}$

ii) Với $-2 < m < 2$ (tức $-1 < \frac{m}{2} < 1$) thì ta có :

t	-1		$\frac{m}{2}$		1
y'		+	0	-	
y	$\frac{1-m}{2}$	↗	$1+\frac{m^2}{8}$	↘	$\frac{1+m}{2}$

Vậy : $y_{max} = 1 + \frac{m^2}{8}$

Nếu $-2 < m < 0$ thì $\frac{1-m}{2} > \frac{1+m}{2}$ nên $y_{min} = \frac{1+m}{2}$;

Nếu $0 \le m < 2$ thì $\frac{1-m}{2} \le \frac{1+m}{2}$ nên $y_{min} = \frac{1-m}{2}$.

iii) Với $m \ge 2$ (tức là $\frac{m}{2} \ge 1$) thì ta có :

x	-1		1
y'		+	
y	$\frac{1-m}{2}$	↗	$\frac{1+m}{2}$

Vậy : $y_{max} = \frac{1+m}{2}, y_{min} = \frac{1-m}{2}$

Kết luận : $y_{min} = \begin{cases} \frac{1+m}{2} & \text{nếu } m < 0 \\ \frac{1-m}{2} & \text{nếu } m \geq 0 \end{cases}$; $y_{max} = \begin{cases} \frac{1-m}{2} & \text{nếu } m \leq -2 \\ 1 + \frac{1}{8}m^2 & \text{nếu } -2 < m < 2 \\ \frac{1+m}{2} & \text{nếu } m \geq 2 \end{cases}$

Ví dụ 6 : Tìm max và min của hàm số :

$$y = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y^2 = 1 + 4\cos x + 4\cos^2 x + 1 + 4\sin x + 4\sin^2 x$

$$+ 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x|$$

$$= 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x|$$

Đặt : $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$,

nên ta có :

$$y^2 = 6 + 4t + 2|1 + 2t + 2(t^2 - 1)| = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|$$

Xét hàm số : $f(t) = 3 + 2t + |2t^2 + 2t - 1|$, với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Ta có :

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})$		$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$		$+\infty$
$2t^2 + 2t - 1$		+	0	-	0	+	

* Với $-\sqrt{2} \leq t \leq \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \vee \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}) \leq t \leq \sqrt{2}$, ta có :

$f(t) = 2t^2 + 4t + 2$ (vì $2t^2 + 2t - 1 \geq 0$)

$f'(t) = 4t + 4 = 4(t+1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

t	$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$		$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$		$\sqrt{2}$
f'(t)		-		(gạch chéo)		+	
f(t)	$6-4\sqrt{2}$	↘	$2-\sqrt{3}$	(gạch chéo)	$2+\sqrt{3}$	↗	$6+4\sqrt{2}$

* Với $\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right) \leq t \leq \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$:

$f(t) = -2t^2 + 4$ (vì $2t^2 + 2t - 1 \leq 0$) $\Rightarrow f'(t) = -4t$

t	$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$		0		$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$2-\sqrt{3}$	↗	4	↘	$2+\sqrt{3}$

Từ các kết quả nêu trên, ta có :

$f_{min} = 2 - \sqrt{3}$ suy ra $y_{min} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$f_{max} = 6 + 4\sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ suy ra $y_{max} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

Ví dụ 7 : Tìm max và min của hàm số :

$$y = 1 + \cos\frac{2x}{1+x^2} + \cos\frac{4x}{1+x^2}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{2x}{1+x^2}$, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$1 + x^2 \geq 2\sqrt{x^2} = 2|x| \Leftrightarrow \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow |t| \leq 1$$

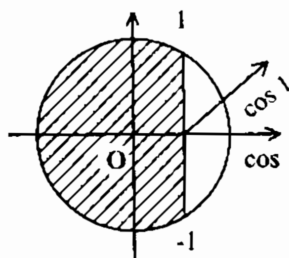
Ta có : $y = 1 + \cos t + \cos 2t = 2\cos^2 t + \cos t$

Đặt $X = \cos t$ thì $y = 2X^2 + X$ với $\cos 1 \leq X = \cos t \leq 1$.

(vì $-1 \leq t \leq 1$ thì $\cos 1 \leq \cos t \leq 1$).

Đạo hàm : $y' = 4X + 1 > 0$ (vì $X \geq \cos 1 > 0$).

X	$\cos 1$		1
y'_X		$+$	
y	min	↗	max



Vậy : $y_{max} = 3$, $y_{min} = \cos 1 + 2\cos^2 1$.

Ví dụ 8 : Cho $a \neq 0$. Tìm max và min của hàm số :

$$y = \left[\frac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{\frac{3}{4}}$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $t = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$. Điều kiện : $t \geq 0$ vì $y = \sqrt[4]{t^3}$.

Hơn nữa, $t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$ nên ta có $y_{min} = 0$.

Từ $t = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$ suy ra :

$$tx^2 + 36t = 12x^2 - 12ax \Leftrightarrow (12-t)x^2 - 12ax - 36t = 0 \qquad (*)$$

Khi $t = 12$: (*) $\Leftrightarrow -12ax - 36t = 0$ là có nghiệm vì $a \neq 0$.

Khi $t \neq 12$: (*) có nghiệm khi :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 36a^2 + 36t(12-t) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + t(12-t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - \sqrt{36+a^2} \leq t \leq 6 + \sqrt{36+a^2}$$

Vậy : $y_{max} = 6 + \left(\sqrt{36+a^2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

C. LUYỆN TẬP

2.1 Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$; b) $y = \sin^4 x$;

c) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; d) $y = \sin\sqrt{x}$;

e) $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$.

2.2 Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1}{(1 + \cos 4x)^6}$; b) $y = \cot^3 \dfrac{x}{3}$;

c) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

2.3 Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$; b) $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$;

c) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; d) $y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$;

e) $y = \sin^2(x^3)$; g) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

2.4 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$. Chứng minh rằng với $n \geq 2$ thì

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}.n$$

2.5 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$. Chứng minh rằng

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! \text{ nếu n là số tự nhiên chẵn} \\ 0 \text{ nếu n là số tự nhiên lẽ} \end{cases}$$

2.6 Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = 4x - x^2$; b) $y = x^2 + 2x - 3$;

c) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$; d) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

e) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$; f) $y = x^3 + \dfrac{1}{4}x^4$.

2.7 Cho V, S lần lượt là thể tích và diện tích xung quanh của một hình nón. Chứng minh :

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \le \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$$

2.8 Cho $f(x) = \dfrac{2}{\sin 2x}$ và $g(x) = 3x - x^3$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Chứng minh rằng $0 < g(x) \le 2$ với $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Chứng minh rằng $\sin 2x < \dfrac{2}{3x - x^3}$ với $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$

2.9 Tìm m để bất phương trình $x + \sqrt{2x^2 + 1} < m$ có nghiệm.

2.10 Tìm m để $x^4 + 4mx + m > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

2.11 Tìm m để $m\ln x - m - 2x \le 0$ với mọi $x > 0$.

2.12 Cho hàm số $y = x^2 + (m+1)^2 + 2|x + m - 1|$. Tìm m để $y_{min} = 3$.

2.13 Cho hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$, với $-2 \le x \le 3$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

2.14 Tìm a để :

$$3\cos^4 x - 5\cos 3x - 36\sin^2 x - 15\cos x + 36 + 24a - 12a^2 > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

2.15 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - m}{x + m}$ với $\in [0 ; 1]$. Tìm m để $y_{max} = -2$.

2.16 Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = (\cos x + \sin x)^3 + \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Chương 3.

TÍCH PHÂN

§ 9. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

Hàm số F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a ; b) nếu F'(x) = f(x) với mọi x thuộc (a ; b).

Nếu F(x) và G(x) đều là nguyên hàm của f(x) trên (a ; b) thì có hằng số C sao cho F(x) = G(x) + C với mọi x ∈ (a ; b).

Do đó ta ghi $\int f(x)dx = F(x) + C$ là tập hợp các nguyên hàm của f(x) hay còn được gọi là tích phân bất định của f(x).

2. Tính chất cơ bản :

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \ ;$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ \ (k \in \mathbf{R}) \ ;$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

3. Bảng công thức :

$\int 0dx = C$;

$\int kdx = kx + C \ (k \in \mathbf{R})$;

$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$;

$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

$\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$;

$$\int (1 + \tan^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int (1 + \cot^2 x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$; $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\left(x^2 - 2x + \frac{4}{x}\right)dx$; b) $\int \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}{x^2}dx$;

c) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^2}dx$; d) $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^4}\right)dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int\left(x^2 - 2x + \frac{4}{x}\right)dx = \int x^2dx - 2\int xdx + 4\int\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4\ln|x| + C.$

b) $\int \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}{x^2}dx = \int\left(x^2 + 2x + 1 + x^{-2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{1}{x} + C.$

c) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^2}dx = \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}dx = \int\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C.$

d) $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^4}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{5}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{5}{9}\sqrt[5]{x^9} + C$$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; b) $\int 2^x.3^{2x}dx$;

c) $\int \cot^2 xdx$; d) $\int \tan^2 xdx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx = 2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \int\left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

b) $\int 2^x.3^{2x}dx = \int (2.3^2)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$

c) $\int \cot^2 x dx = \int (\cot^2 x + 1 - 1)dx = \int (\cot^2 x + 1)dx - \int dx$

$= -\cot x - x + C.$

d) $\int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int (\tan^2 x + 1)dx - \int dx = \tan x - x + C.$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$;

c) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}dx$;

d) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}dx.$

Hướng dẫn giải

a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \text{tg}x - \text{cotg}x + C.$

b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$= -\cot x - \tan x + C.$

c) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)dx = \frac{1}{2}(\tan x + x) + C.$

d) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}dx = \int (1 - \cos x)dx = x - \sin x + C.$

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x\sqrt{3 - 2x}$. Tìm các số a, b, c sao cho $F(x) = (ax^2 + bx + c).\sqrt{3 - 2x}$ là nguyên hàm của y.

Hướng dẫn giải

Ta có : $F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3 - 2x} + (ax^2 + bx + c)\frac{-1}{\sqrt{3 - 2x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}\left[(2ax + b)(3 - 2x) - (ax^2 + bx + c)\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}\left[-5ax^2 + (6a - 3b)x + (3b - c)\right]$

Để F(x) là nguyên hàm của y thì ta có :

$$F'(x) = y,\ x < \frac{3}{2}$$

Tức là : $-5ax^2 + (6a - 3b)x + (3b - c) = -2x^2 + 3x\ \left(x \in \left(-\infty ; \frac{3}{2}\right)\right).$

Suy ra : $\begin{cases} -5a = -2 \\ 6a - 3b = 3 \\ 3b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} ; b = -\frac{3}{5} ; c = -\frac{9}{5}.$

Ví dụ 5 : Cho $G(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ và $y = \frac{x}{1 + |x|}$. Chứng minh G(x) là nguyên hàm của y.

Hướng dẫn giải

Với $x > 0$: Ta có $y = \frac{x}{x+1}$ và $G(x) = x - \ln(1 + x)$ nên :

$$G'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = y$$

Với $x < 0$: Ta có $y = \frac{x}{1-x}$ và $G(x) = -x - \ln(1 - x)$ nên :

$$G'(x) = -1 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} = y$$

Với $x = 0$: ta có :

$y(0) = 0$;

$$G'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[1 - \frac{\ln(1 + x)}{x}\right]$$

$$= 1 - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x} = 1 - 1 = 0 ;$$

$$G'_-(0) = \lim_{x \to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - \ln(1 - x)}{x} = -1 - \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{1 - x} = 0.$$

Do đó : $G'(0) = 0 = y(0)$.

Vậy $G'(x) = y(x), \forall x \in \mathbf{R}$ nên G(x) là nguyên hàm của y.

Ví dụ 6 : Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên **R** thoả :

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R};$$

$$f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R};$$

$$f(0) = 1.$$

Hãy xác định f(x).

Hướng dẫn giải

Theo đề bài : $f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ suy ra :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1, \forall x \in \mathbf{R} \text{ (vì } f(x) \neq 0, \forall x)$$

Lấy nguyên hàm cả hai vế, ta có :

$$\ln|f(x)| = x + C \Leftrightarrow f(x) = e^{x+C} \Leftrightarrow f(x) = e^x.e^C$$

(vì $f(x) > 0$ nên $|f(x)| = f(x)$).

Hơn nữa : $f(0) = 1$ nên $1 = 1.e^C \Rightarrow e^C = 1$. Suy ra : $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 7 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}dx$;

b) $\int \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}\,dx$;

c) $\int tx^2dx$;

d) $\int tx^2dt$;

Hướng dẫn giải

a) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}dx = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C.$

b) $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}dx = \int \frac{1}{x^3}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

c) $\int tx^2dx = t\int x^2dx = t.\frac{x^3}{3} + C.$

d) $\int tx^2dt = x^2\int tdt = x^2.\frac{t^2}{2} + C.$

§ 10. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

Cho G(x) là nguyên hàm của f(x) trên đoạn [a ; b] thì tích phân của f(x) trên đoạn [a ; b] được định bởi :

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

Nhận xét : Ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

2. Tính chất cơ bản :

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

c) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

d) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ (k \in \mathbf{R})$;

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ (a \le c \le b)$;

f) Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$;

g) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$;

b) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$;

c) $\int_0^1 e^{-x} dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$;

e) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$; f) $\int_0^3\left[|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}\right]dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1.$

b) $\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=0-0=0.$

c) $\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=-\left(e^{-1}-e^0\right)=1-\frac{1}{e}.$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-1.$

e) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$

$=-\sqrt{2}(-1-1)+\sqrt{2}\left[1-(-1)\right]=4\sqrt{2}.$

g) $\int_0^3\left[|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}\right]dx=\int_0^3(|x-1|+|x-2|)dx$

$=\int_0^1(1-x+2-x)dx+\int_1^2(x-1+2-x)dx+\int_2^3(x-1+x-2)dx$

$=\int_0^1(3-2x)dx+\int_1^2 dx+\int_2^3(2x-3)dx$

$=3-x^2\Big|_0^1+1+x^2\Big|_2^3-3=1-(1-0)+(9-4)=5.$

Ví dụ 2 : Cho hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [a ; b] và thoả f(a) = f(b). Hãy tính $\int_a^b f'(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Ta có f(x) là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên :

$$\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)=0.$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số f(x) có đạo hàm và thoả :

* $f'(x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$;

* f(0) = 3.

Chứng minh rằng $f(x) = 3e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$, ta có :

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{2x} - 2f(x)e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{3x}} = 0$$

(do giả thiết).

Vì $g'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ nên g(x) là một hằng số. Hơn nữa g(0) = f(0) = 3 nên g(x) = 3 với mọi $x \in \mathbf{R}$. Suy ra :

$$f(x) = 3e^{2x},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Ví dụ 4 : Cho f(x) là hàm số liên tục trên **R** và thoả :

$$\int_0^x f(t)dt = f(x),\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng f(x) = 0 với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $f'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$; $f(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$.

Xét hàm số : $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, ta có : $g'(x) = \dfrac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$

(vì $f'(x) = f(x)$)

Suy ra g(x) là hằng số với mọi $x \in \mathbf{R}$. Hơn nữa ta lại có g(0) = f(0) = 0 nên g(0) = 0, ∀x. Do đó phải có f(x) = 0, $\forall x \in \mathbf{R}$.

§ 11. CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Với nguyên hàm :

Cho f, φ, φ' là các hàm số liên tục thì :

$$\int f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

trong đó $t = \varphi(x)$ và $d(t) = \varphi'(x)dt$

2. Với tích phân xác định :

Cho f, φ, φ' là các hàm số liên tục và thoả : Khi $a \le x \le b$ thì $\varphi(a) \le \varphi(x) \le \varphi(b)$ (hoặc $\varphi(b) \le \varphi(x) \le \varphi(a)$ thì :

$$\int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

trong đó $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$.

3. Bảng công thức tích phân :

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C\ ;$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C\ ;$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C\ ;$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C\ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C\ ;$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C\ ;$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int(\tan x+\tan^3 x)dx$; b) $\int[x(3-x^4)]^3 dx$;

c) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}dx$; d) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $t=\tan x \Rightarrow dt=(1+\tan^2 x)dx$

$$\int(\tan x+\tan^3 x)dx=\int\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int t dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C.$$

b) Đặt $t=3-x^4 \Rightarrow dt=-4x^3dx$

$$\int[x(3-x^4)]^3 dx=\int(3-x^4)^3.x^3dx-\frac{1}{4}\int t^3dt=-\frac{t^4}{16}+C=-\frac{(3-x^4)^4}{16}+C.$$

c) Đặt $t=\cos x-\sin x \Rightarrow dt=-(\sin x+\cos x)dx$

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}dx=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x-\sin x|+C.$$

d) Đặt $t=e^{\sqrt{x}} \Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}dx.$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}dx=\int 2dt=2t+C=2e^{\sqrt{x}}+C.$$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\frac{1}{x}\ln x\,dx$; b) $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$; c) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

$$\int\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int t dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

b) Đặt : $t=e^x+1 \Rightarrow dt=e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

c) Đặt $t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\tan x} + C.$$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau :

a) $\int (x+1).\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$;   b) $\int \frac{x^4}{x-1}dx.$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow dt = 2(x+1)dx.$

$$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x+4)^3} + C.$$

b) $\int \frac{x^4}{x-1}dx = \int \frac{x^4-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$

$$= \int (x^3+x^2+x+1)dx + \ln|x-1| + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$$

Ví dụ 4 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$;   b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$;   c) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}=\int_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{2dt}{2+2t}=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln 2.$$

b) Đặt : $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$

Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=1$ thì $t=e$.

$$\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx=\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_1^e$$

$$=\ln\left(e+\sqrt{e^2+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\left(\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

c) Đặt $x=\cos t\Rightarrow dx=-\sin t dt$.

Khi $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{2}$; khi $x=1$ thì $t=0$.

$$\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\sin t\,dt}{\cos t+\sqrt{1-\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\,dt}{\cos t+\sin t}$$

Đặt : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin dt}{\cos t+\sin t},\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\cos t+\sin t}.$

Ta có : $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.\ J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}dt=\ln|\cos t+\sin t|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$

Do đó : $I=J=\frac{\pi}{4}$. Vậy : $\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}.$

Ví dụ 5 : Cho $f:[-1\ ;\ 1]\to\mathbf{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$;

b) Suy ra cách tính :

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx\ \text{ và }\ J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2+\cos x}dx.$$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=\pi-x\Rightarrow x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = \pi$; khi $x = \pi$ thì $t = 0$.

Ta có : $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

Suy ra : $2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

Tức là : $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

b) Ta có : $I = \int_0^{\pi} x.\frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx$ (theo câu a)

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{4}tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}\left[tg\frac{\pi}{4} - tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}(1+1) = \frac{\pi}{2};$$

$$J = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x}{2+\cos x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx \text{ (theo câu a)}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln|2+\cos x|\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}(\ln 1 - \ln 3) = \frac{\pi}{2}\ln 3.$$

Ví dụ 6 : Cho các tích phân sau :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$, với n là số nguyên dương.

Chứng minh I = J rồi suy ra cách tính I, J.

Hướng dẫn giải

Đặt : $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt.$

Ta có : $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t}dt = J$

Và : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x + \cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}.$

Ví dụ 7 : Cho f : **R** → **R**.

a) Nếu f là hàm số lẻ, chứng minh rằng : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

b) Nếu f là hàm số chẵn, chứng minh rằng : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Đặt : $t = -x \Rightarrow x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Ta có : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$ (vì f lẻ)

Tức là : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$. Suy ra : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

b) Vẫn đặt : $t = -x$, ta có :

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt \text{ (vì f chẵn)}$$

Do đó : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Ví dụ 8 : Cho f : **R** → **R** là hàm số lẻ. Chứng minh rằng $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ là hàm số chẵn.

Hướng dẫn giải

Ta có : $g(-x) = \int_{0}^{-x} f(t)dt$. Đặt : $u = -t \Rightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

Ta có : $g(-x) = -\int_{0}^{x} f(-u)du = \int_{0}^{x} f(u)du$ (vì f lẻ).

Tức là $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ví dụ 9 : Cho $x > 0$. Chứng minh rằng :

$$\int_{x}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $u = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{1}{u^2}du$.

Ta có : $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1}$. Vậy ta có : $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

§ 12. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Với nguyên hàm :**

Cho u, v là các hàm số có đạo hàm liên tục thì :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2. **Với tích phân xác định :**

Cho u, v là các hàm số có đạo hàm liên tục trên [a ; b] thì :

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

3. **Cách dùng công thức tích phân từng phần :**

Ta dùng P(x) để chỉ cho một đa thức.

– Khi gặp các tích phân có dạng :

$$\int P(x)a^x dx,\ \int P(x)\sin x\, dx,\ \int P(x)\cos x\, dx$$

nên dùng tích phân từng phần để tính với cách đặt : u = P(x).

– Khi gặp các tích phân có dạng :

$$\int P(x)\log_a x\, dx$$

nên dùng tích phân từng phần để tính với cách đặt : u = P(x).

– Khi gặp các tích phân có dạng :

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx,\ \int e^{ax}\cos bx\, dx$$

nên dùng tích phân từng phần hai lần để tính với cách đặt : $u = e^{ax}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int x\ln x\,dx$; b) $\int x.2^x dx$;

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$

Ta có : $\int x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

b) Đặt : $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = 2^x dx \Rightarrow v = \frac{2^x}{\ln 2}$

Ta có : $\int x2^x dx - \frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx = \frac{x.2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}.2^x + C.$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau :

a) $\int x\cot^2 xdx$; b) $\int \sqrt{x}\ln xdx$;

c) $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx$; d) $\int x\ln(x + 2)dx$;

e) $\int \sin x\ln(1 + \cos x)dx$; g) $\int \cos x\ln(1 + \cos x)dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cot^2 xdx = \left[\left(1 + \cot^2 x\right) - 1\right]dx \Rightarrow v = -\cot - x$

Ta có : $\int x\cot^2 xdx = -x(\cot x + x) + \int(\cot x + x)dx$

$= -x\cot x - x^2 + \int\frac{\cos x}{\sin x}dx + \frac{x^2}{2} = -x\cot x - \frac{x^2}{2} + \ln|\sin x| + C.$

b) Đặt : $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx,\ dv = \sqrt{x}dx \Rightarrow v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Ta có : $\int\sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C.$

c) Đặt : $u = \ln\left(x + \sqrt{1 + x)^2}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x.$

Ta có : $\int\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

d) Đặt : $u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \frac{1}{x+2}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có : $\int x\ln(x+2)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+2}dx$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int\left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right] + C.$$

e) Đặt : $u = \ln(1+\cos x) \Rightarrow du = -\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$dv = \sin x dx \quad \Rightarrow v = -\cos x$

Ta có : $\int\sin x\ln(1+\cos x)dx = -\cos x\ln(1+\cos x) - \int\sin x\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$$= -\cos x\ln(1+\cos x) - \int\sin x\left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right)dx$$

$$= -\cos x\ln(1+\cos x) - \int\sin x dx - \int\frac{-\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$= -\cos x\ln(1+\cos x) + \cos x - \ln(1+\cos x) + C.$$

g) Đặt : $u = \ln(1+\cos x) \Rightarrow du = -\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

Ta có : $\int\cos x\ln(1+\cos x)dx = \sin x\ln(1+\cos x) + \int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$

$= \sin x\ln(1+\cos x) + \int(1-\cos x)dx$ (vì $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$= \sin x\ln(1+\cos x) + x - \sin x + C.$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \sin(\ln x)dx$ và $\int \cos(\ln x)dx$; b) $\int xe^{\sqrt{x}}dx$; c) $\int \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $I = \int \sin(\ln x)dx$ và $J = \int \cos(\ln x)dx$.

Tính I :

Đặt : $u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta có : $I = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \Leftrightarrow I = x\sin(\ln x) - J$ (1)

Tính J :

Đặt : $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta có : $J = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx \Leftrightarrow J = x\cos(\ln x) + I$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$I = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C,\quad J = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] + C.$$

b) Đặt : $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

Ta có : $I = \int xe^{\sqrt{x}}dx = \int t^2e^t.2tdt = 2\int t^3e^tdt$;

Đặt : $u = t^3 \Rightarrow du = 3t^2dt$; $dv = e^tdt \Rightarrow v = e^t$

Ta có : $I = 2\left(t^3e^t - 3\int t^2e^tdt\right) = 2t^3e^t - 6\int t^2e^tdt$;

Đặt : $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$; $dv = e^tdt \Rightarrow v = e^t$

Ta có : $I = 2t^3e^t - 6\left(t^2e^t - 2\int te^tdt\right) = 2e^t\left(t^3 - 3t^2\right) + 12\int te^tdt$;

Đặt : $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = e^tdt \Rightarrow v = e^t$

Ta có : $I = 2e^t\left(t^3 - 3t^2\right) + 12\left(te^t - \int e^tdt\right) = 2e^t\left(t^3 - 3t^2\right) + 12\left(te^t - e^t\right) + C$

$$= 2e^t\left(t^3 - 3t^2 + 6t - 6\right) + C = 2e^{\sqrt{x}}\left(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6\right) + C.$$

c) Ta có : $I = \int\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \int\frac{1}{\ln^2 x}dx - \int\frac{1}{\ln x}dx$

Tính $\int\frac{1}{\ln x}dx$:

Đặt : $u = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x\ln^2 x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta có : $\int\frac{1}{\ln x}dx = \frac{x}{\ln x} + \int\frac{1}{\ln^2 x}dx.$

Suy ra : $\int\frac{1}{\ln^2 x}dx - \int\frac{1}{\ln x}dx = \frac{-x}{\ln x} + C.$

Vậy : $I = -\frac{x}{\ln x} + C.$

Ví dụ 4 : Tính các tích phân sau :

a) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$;

b) $\int \sin x \ln(\tan x)dx$;

c) $\int x\sin\sqrt{x}dx$;

d) $\int e^{-x}\cos 2x dx$;

e) $\int e^{2x}\sin^2 x dx$;

g) $\int\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

$$\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \int x\ln(x+1)dx - \int x\ln(1-x)dx$$

Tính $I_1 = \int x\ln(x+1)dx$:

Đặt : $u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có : $I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right] + C;$$

Tính $I_2 = \int x\ln(1-x)dx$:

Đặt : $u = \ln(1-x) \Rightarrow du = \frac{-1}{1-x}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có : $I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right) + C$$

Suy ra : $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln(1-x^2)\right] + C.$

b) Đặt : $u = \ln(\tan x) \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\tan x}dx = \frac{1}{\sin x\cos x}dx$

$dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$

Ta có : $\int\sin x\ln(\tan x)dx = -\cos x\ln(\tan x) + \int\frac{1}{\sin x}dx$

$= -\cos x\ln(\tan x) + \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = -\cos x\ln(\tan x) + \int\frac{-dt}{1-t^2}$

$(t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin xdx)$

$= -\cos\ln(\tan x) + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\cos x\ln(\tan x) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$

c) Đặt : $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

Ta có : $I = \int x\sin\sqrt{x}dx = \int t^2\sin t.2tdt = 2\int t^3\sin tdt$;

Đặt : $u = t^3 \Rightarrow du = 3t^2dt$; $dv = \sin tdt \Rightarrow v = -\cos t$

Ta có : $I = -t^3\cos t + 3\int t^2\cos tdt$;

Đặt : $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$; $dv = \cos tdt \Rightarrow v = \sin t$

Ta có : $I = -t^3\cos t + 3\left(t^2\sin t - 2\int t\sin tdt\right) = -t^3\cos t + 3t^2\sin t - 6\int t\sin tdt$

Đặt : $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = \sin tdt \Rightarrow v = -\cos t$

Ta có : $I = -t^3\cos t + 3t^2\sin t - 6\left(-t\cos t + \int\cos tdt\right)$

$$= -t^3\cos t + 3t^2\sin t - 6t\cos t - 6\sin t + C$$

Vậy : $I = -x\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 3x\sin\sqrt{x} + 6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6\sin\sqrt{x} + C.$

d) Đặt : $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx$; $dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

Ta có : $I = \int e^{-x}\cos 2xdx = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2xdx$;

Đặt : $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx$; $dv = \sin 2xdx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Ta có : $I = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2xdx\right)$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}I$$

Suy ra : $I = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = \frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$

e) Ta có : $I = \int e^{2x}\sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(1 - \cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2xdx \text{ ;}$$

Đặt : $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$, ta có :

$$I = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{t}\cos tdt \text{ ;}$$

Đặt : $u = e^{t} \Rightarrow du = e^{t}dt$; $dv = \cos tdt \Rightarrow v = \sin t$

Ta có : $I = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}\left(e^{t}\sin t - \int e^{t}\sin tdt\right)$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x + \frac{1}{4}\int e^{t}\sin tdt \text{ ;}$$

Đặt : $u = e^{t} \Rightarrow du = e^{t}dt$; $dv = \sin dt \Rightarrow v = -\cos t$

Ta có : $I = \frac{1}{4}e^{2x}(1 - \sin 2x) + \frac{1}{4}\left(-e^{t}\cos t + \int e^{t}\cos tdt\right)$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(1 - \sin 2x) - \frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x + \left(\frac{1}{4}e^{2x} - I\right)$$

Suy ra : $I = \frac{1}{8}e^{2x}(1 - \sin 2x) - \frac{1}{8}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + C.$

g) Đặt : $u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x}dx$; $dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow v = -\cot x$

Ta có : $\int \frac{1}{\sin^2 x} \ln(\sin x)dx = -\cot x \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$

$$= -\cot x \ln(\sin x) - \cot x - x + C.$$

Ví dụ 5 : Tính tích phân : $I = \int x^2 e^x \sin x dx.$

Hướng dẫn giải

Đặt : $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = e^x \sin x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$

Ta có : $I = \frac{x^2}{2} e^x (\sin x - \cos x) - \int x e^x (\sin x - \cos x) dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^x (\sin x - \cos x) - \int x e^x \sin x dx + \int x e^x \cos x dx ;$$

Xét $I_1 = \int x e^x \sin x dx$:

Đặt : $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x \sin x \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$

Ta có : $I_1 = \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x (\sin x - \cos x) dx$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x \cos x + C ;$$

Xét $I_2 = \int x e^x \cos x dx$:

Đặt : $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x \cos x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$

Ta có : $I_2 = \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x (\sin x + \cos x) dx$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} e^x \sin x + C.$$

Suy ra : $I = \frac{1}{2}x^2e^x(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) - \frac{e^x}{2}\cos x$

$$+\frac{1}{2}xe^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^x\sin x + C$$

$$= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)(x^2 - x) + xe^x\cos x - \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Ví dụ 6 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x\log_2 x dx$; b) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$;

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $u = \log_2 x \Rightarrow du = \frac{1}{x\ln 2}dx$; $dv = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có : $I = \frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}(4-0) - \frac{1}{4\ln 2}.x^2\Big|_1^2 = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$

b) Đặt : $u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có : $I = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 7 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$; b) $\int_{1/2}^{2}|\ln x|dx.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{xdx}{1+\cos x} + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin xdx}{1+\cos x}.$

Xét $I_1 = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin xdx}{1+\cos x}$:

Đặt : $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin xdx$, ta có :

$$I_1 = \int_{3/2}^{1}\frac{-dt}{t} = \int_1^{3/2}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{3/2} = \ln\frac{3}{2} ;$$

Xét $I_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{xdx}{1+\cos x} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{xdx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$:

Đặt : $t = \frac{x}{2} \Rightarrow 2dt = dx$; $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Ta có : $I_2 = 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{tdt}{\cos^2 t}$;

Đặt : $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = \frac{dt}{\cos^2 t} \Rightarrow v = tgt$

Ta có : $I_2 = ttgt\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} - \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin tdt}{\cos t} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.\frac{\sqrt{3}}{3} + \ln(\cos t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \ln\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vậy : $I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}.$

Ví dụ 8 : Cho f là hàm số liên tục trên [0 ; 1]. Đặt $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ với $0 \le x \le 1$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $G'(x) = \left(\int_0^x ft(dt)\right)'_x = f(x)$

Xét $I = \int_0^1 xf(x)dx$: Đặt $u = v \Rightarrow du = dx$; $dv = f(x)dx \Rightarrow v = G(x)$

Ta có : $I = xG(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 G(x)dx = G(1) - \int_0^1 G(x)dx = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 G(x)dx$

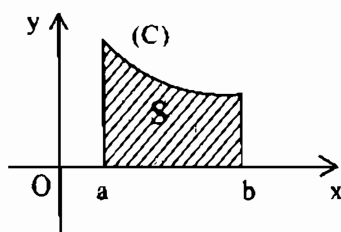
Vậy : $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 G(x)dx.$

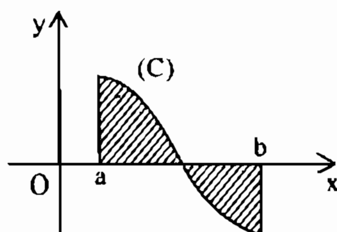
§ 13. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) : y = f(x), trục hoành và các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi :

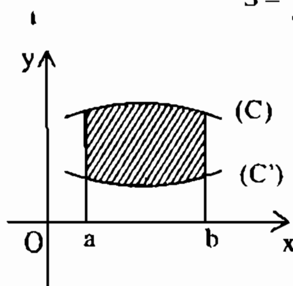
$$S = \int_a^b |f(x)|dx \text{ (với } a < b)$$

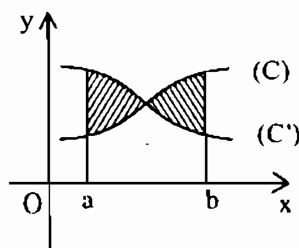




2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị (C) : y = f(x), (C'): y = g(x) và các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi công thức :

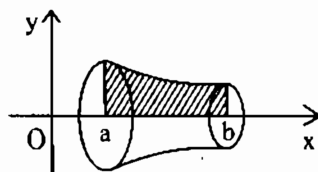
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$





3. Thể tích khối tròn xoay khi quanh trục Ox của một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) : y = f(x), trục hoành, các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi :

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$



B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = 2 - x^2$ với đường thẳng (d) : y = x.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (d) là :

$$x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (d) là :

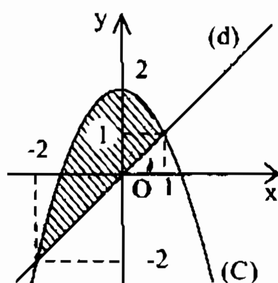
$$S = \int_{-2}^{1} \left|x - (2 - x^2)\right| dx = \int_{-2}^{1} \left|x^2 + x - 2\right| dx$$

$$= -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2) dx \text{ (vì } x^2 + x - 2 \le 0 \text{ khi } -2 \le x \le 1)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} + 6$$

$$= -\frac{1}{3}(1 + 8) - \frac{1}{2}(1 - 4) + 6$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}. \text{ Vậy : } S = \frac{9}{2} \text{ (đvdt).}$$



Ví dụ 2 : Cho đồ thị (C) : $y = -x^2 + 4x - 3$

a) Viết phương trình các tiếp tuyến $(T_1), (T_2)$ với (C) tại $M_1(0 ; -3)$, $M_2(3 ; 0)$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các tiếp tuyến $(T_1), (T_2)$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = -2x + 4$

Tiếp tuyến (T_1) có phương trình là : $y = 4x - 3$;

Tiếp tuyến (T_2) có phương trình là : $y = -2x + 6$;

b) Phương trình hoành độ giao điểm giữa (T_1) và (T_2) là :

$$4x - 3 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các tiếp tuyến (T_1), (T_1) là :

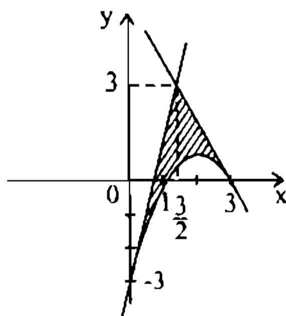
$$S = \int_0^{3/2}\left[4x-3-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx +$$

$$+\int_{3/2}^{3}\left[-2x+6-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{3/2} x^2dx + \int_{3/2}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{3/2} + \int_{3/2}^{3}(x-3)^2dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{27}{8} + \frac{1}{3}(x-3)^3\Big|_{3/2}^{3} = \frac{9}{4}\text{ (đvdt)}$$



Ví dụ 3 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ ...

Hướng dẫn giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^{\pi}|\sin x - \cos x|dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

Đặt : $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow dx = dt$

Ta có :

t	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{3\pi}{4}$
sin t		-	0	+	

$$S = \sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}|\sin t|dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{0} -\sin t dt + \sqrt{2}\int_0^{3\pi/4}\sin t dt$$

$$= \sqrt{2}\cos t\Big|_{-\pi/4}^{0} - \sqrt{2}\cos t\Big|_0^{3\pi/4} = \sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) = 2\sqrt{2}\text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 4 : Cho (C) có phương trình : $(y-x)^2 = x^3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng $x = 1$.

Hướng dẫn giải

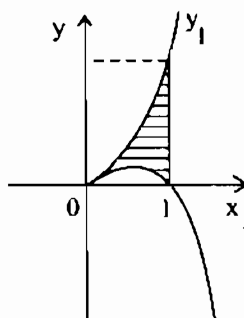
(C) có phương trình :

$$(y-x)^2 = x^3 \Leftrightarrow y - x = \pm\sqrt{x^3}\ \text{(với } x \geq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow y = x \pm \sqrt{x^3}\ (x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = x + \sqrt{x^3} \\ y_2 = x - \sqrt{x^3} \end{array}\right. \quad (x \geq 0)$$

Diện tích giới hạn bởi (C) và đường thẳng x = 1 là :



$$S = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 2\sqrt{x^3}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^{3/2}dx = 2.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 5 : Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 8$ và parabol (P) : $y^2 = 2x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (ở bên trong (P)).

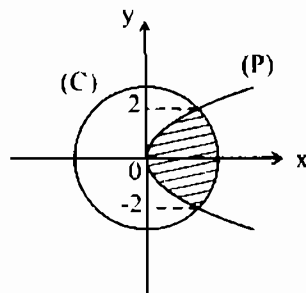
Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (P) là :

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với x = 2 thì y = ±2

(P) có phương trình là :



$$x = \frac{1}{2}y^2$$

(C) có phương trình là :

$$x = \pm\sqrt{8 - y^2}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{1}{2}y^2\right)dy = 2\int_0^2 \sqrt{8 - y^2}dy - \int_0^2 y^2dy$$

Ta có : $\int_0^2 y^2dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$; Tính $I = \int_0^2 \sqrt{8 - y^2}dy$:

Đặt : $y = 2\sqrt{2}\cos t \Rightarrow dy = -2\sqrt{2}\sin tdt$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{8 - 8\cos^2 t}\left(-2\sqrt{2}\right)\sin tdt$$

$$= 8\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt$$

$$= \pi - 2\sin 2t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi - 2(0-1) = \pi + 2.$$

y	0	2
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

Suy ra : $S = 2(\pi+2) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$ (đvdt).

Ví dụ 6 : Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và hai điểm A, B chạy trên (P) sao cho AB = 2.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn AB.

b) Tìm vị trí của A và B sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $A\left(x_1 ; x_1^2\right)$, $B\left(x_2 ; x_2^2\right)$ là 2 điểm thuộc (P).

$$AB = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2\left[1 + (x_2 + x_1)^2\right] = 4 \quad (*)$$

Ta lại có : $I\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & \text{(i)} \\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) & \text{(ii)} \end{cases}$

Từ (i), ta có : $x_1 + x_2 = 2x$

Từ (ii), ta có : $x_1^2 + x_2^2 = 2y$

Mặt khác :

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 - \left[(x_1 + x_2)^2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]$$

$$= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - (x_1 + x_2)^2 = 4y - (2x)^2.$$

Do đó : (*) $\Leftrightarrow \left(4y - 4x^2\right)\left(1 + 4x^2\right) = 4 \Leftrightarrow \left(y - x^2\right)\left(1 + 4x^2\right) = 1$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + \frac{1}{1 + 4x^2}$$

Vậy tập hợp của I là đồ thị của hàm số

$$y = x^2 + \frac{1}{1 + 4x^2}.$$

b) Đường thẳng AB có phương trình là :

$$y - x_1^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y = (x_2 + x_1)(x - x_1) + x_1^2$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là :

$$S = \int_{x_1}^{x_2}\left[(x_2 + x_1)(x - x_1) + x_1^2 - x^2\right]dx \text{ (giả sử } x_1 < x_2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left[(x_2 + x_1)x - x^2 - x_1x_2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 + x_1)x^2\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{x_1}^{x_2} - x_1x_2(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_2^2 - x_1^2) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - x_1x_2(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)\left[3(x_2 + x_1)^2 - 2(x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2) - 6x_1x_2\right]$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 \le \frac{1}{6}(AB)^3 = \frac{1}{6}.2^3 \text{ (hằng số)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_2 - x_1 = AB = 2$; lúc đó AB song song với trục Ox nên $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Vậy S lớn nhất khi A(−1 ; 1), và B(1 ; 1).

Ví dụ 7 : Cho parabol (P) : $y = x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm I(1, 3) và sao cho tạo với (P) hình phẳng có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng (d) qua I(1 ; 3) có phương trình dạng :

$y = k(x - 1) + 3$

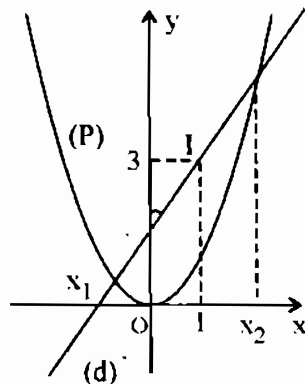
Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) :

$x^2 = k(x - 1) + 3 \Leftrightarrow x^2 - kx + k - 3 = 0.$

Theo Viet, ta có :

$x_1 + x_2 = k$, $x_1x_2 = k - 3$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (P) là :



$$S = \int_{x_1}^{x_2} (kx + 3 - k - x^2)dx \text{ (với } x_1 < x_2)$$

$$= \frac{k}{2}x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} + (3-k)(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) + (3-k)(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$$

$$= (x_2 - x_1)\left[\frac{k}{2}(x_2 + x_1) + 3 - k - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2)\right]$$

$$= (x_2 - x_1)\left[\frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2 - x_1x_2 - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)\left[3(x_2 + x_1)^2 - 6x_1x_2 - 2(x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2)\right] = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3.$$

Ta lại có : $(x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = k^2 - 4(k-3) = k^2 - 4k + 12$

nên suy ra : $S^2 = \frac{1}{36}(x_2 - x_1)^6 = \frac{1}{36}(k^2 - 4k + 12)^3$

Do đó S nhỏ nhất khi $k^2 - 4k + 12$ nhỏ nhất, tức là k = 2 và khi ấy đường thẳng (d) cần tìm có phương trình là :

$$y = 2x + 1$$

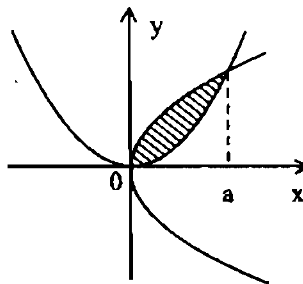
Ví dụ 8 : Cho a > 0. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong sau đây : $(C_1): ax = y^2$ và $(C_2): ay = x^2$.

Hướng dẫn giải

(C_1) có phương trình là :

$$ax = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{ax} \text{ (với } x \ge 0)$$

(C_2) có phương trình là : $y = \frac{1}{a}x^2$



Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_2) và nhánh $y = \sqrt{ax}$ của (C_1) là :

$$\sqrt{ax} = \frac{1}{a}x^2 \Leftrightarrow ax = \frac{1}{a^2}x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$$

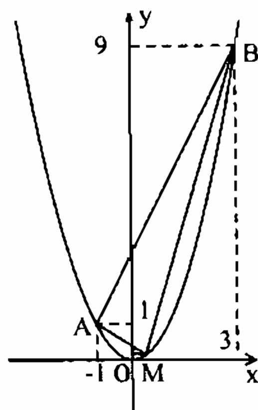
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1) và (C_2) là :

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{1}{a}x^2\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{a}\,x\sqrt{x}\Big|_0^a-\frac{1}{3a}x^3\Big|_0^a$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{a}.a\sqrt{a}-\frac{1}{3a}a^3=\frac{a^2}{3}\ (\text{đvdt})$$

Ví dụ 9 : Trên (P) : $y=x^2$ cho các điểm A(−1 ; 1) và B(3 ; 9). Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Đặt điểm $M(t\ ;t^2)$ với $-1\le t\le 3$ thuộc cung AB của (P).

Phương trình đường thẳng AM là : $y(t+1)x+t+2$.

Phương trình đường thẳng BM là : $y=(t+3)x-3t$.

Diện tích hình giới hạn bởi (P), đoạn thẳng AM, đoạn thẳng BM là :

$$S=\int_{-1}^{t}\left[(t+1)x+t+2-x^2\right]dx+\int_t^3\left[(t+3)x-3t-x^2\right]dx.$$

$$=\frac{t+1}{2}.x^2\Big|_{-1}^{t}+(t+2)(t+1)-\frac{1}{3}.x^3\Big|_{-1}^{t}$$

$$+\frac{t+3}{2}x^2\Big|_t^3-3t(3-t)-\frac{1}{3}x^3\Big|_t^3$$

$$=\frac{t+1}{2}\left(t^2-1\right)+(t+2)(t+1)-\frac{1}{3}\left(t^3+1\right)$$

$$+\frac{t+3}{2}\left(9-t^2\right)-3t(3-t)-\frac{1}{3}\left(27-t^3\right)$$

$$=\frac{1}{2}t^3+\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}+t^2+3t+2-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}$$

$$+\frac{9t}{2}+\frac{27}{2}-\frac{t^3}{2}-\frac{3t^2}{2}-9t+3t^2-9+\frac{1}{3}t^3$$

$$=3t^2-2t+\frac{17}{3}$$

Đạo hàm : $S'_t = 6t - 2$; $S' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Ta có ΔAMB có diện tích lớn nhất khi S nhỏ nhất. S nhỏ nhất đạt được khi $t = \frac{1}{3}$ nên $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 10 : Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với (E) kẻ từ điểm A(3, 0).

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (E) và các tiếp tuyến nêu trong câu a) (phần ở bên ngoài elip).

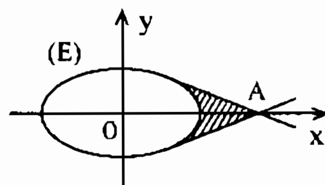
Hướng dẫn giải

a) Tiếp tuyến (T) qua A(3 ; 0) có phương trình dạng :

$$y = k(x - 3) \Leftrightarrow kx - y - 3k = 0.$$

(T) tiếp xúc (E) nên :

$4k^2 + 1 = 9k^2 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.



Vậy có 2 tiếp tuyến kẻ từ A :

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 3) \text{ và } y = -\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 3)$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm giữa $(T_1): y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 3)$ với (E) là :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{5}(x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Phương trình của (E) được viết là :

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Do tính đối xứng của hình qua trục Ox nên diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = 2\int_{4/3}^{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 3) - \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\right]dx + \int_{2}^{3} -\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 3)dx$$

$$S = \frac{169}{45\sqrt{5}} \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 11 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = x,\ y = x + \cos^2 x,\ x = 0,\ x = \pi.$$

Hướng dẫn giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^{\pi}\left[\left(x + \cos^2 x\right) - x\right]dx = \int_0^{\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 12 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong có phương trình sau : $y^2 = 2x$ và $27y^2 = 8(x-1)^3$

Hướng dẫn giải

Gọi $(C_1): y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}$; $(C_2): (x-1)^3 = \frac{27}{8}y^2 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$

Toạ độ giao điểm của (C_1) và (C_2) thoả :

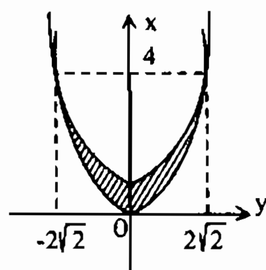
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ 54x = 8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2\sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} - \frac{1}{2}y^2\right)dy$$

$$= 2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} - \frac{1}{2}y^2\right)dy$$

$$= 4\sqrt{2} + 3.\frac{3}{5}y^{5/3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{88\sqrt{2}}{15} \text{(đvdt).}$$



Ví dụ 13 :

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C') của $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

c) Tính diện tích hình phẳng S(t) giới hạn bởi (C), (C') và các đường thẳng $x = 0$, $x = t$ (với $t > 0$).

d) Tìm lim S(t) khi $t \to +\infty$.

Hướng dẫn giải

a) Với $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ thì $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

Khi $x \to -\infty$ thì $y \to -\infty$;

khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) Với $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ thì $y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$.

Khi $x \to -\infty$ thì $e^x \to 0$, $e^{-x} \to -\infty$ nên $y \to -\infty$

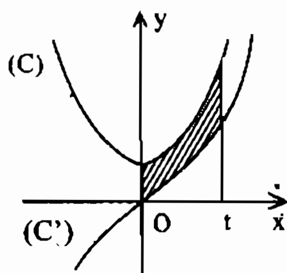
Khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), (C'), $x = 0$, $x = t$ là :

$$S(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]dx = \int_0^t e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^t = -(e^{-t} - 1)$$

d) $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(1 - e^{-t}) = 1$ (vì $t \to \infty$ thì $e^{-t} \to 0$)



Ví dụ 14 :

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của $y = \frac{|\ln x|}{x}$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục Ox, $x = \frac{1}{e}$ và $x = e$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $y = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & \text{nếu } x \geq 1 \\ -\dfrac{\ln x}{x} & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ nên có

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x) & \text{nếu } x > 1 \\ \dfrac{1}{x^2}(\ln x - 1) & \text{nếu } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Với $x > 1$: $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Với $0 < x < 1$: thì $\ln x < 0$ nếu $y' < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang.

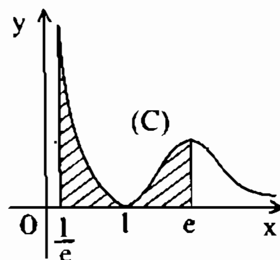
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục Ox, $x = \dfrac{1}{e}$ và $x = e$ là :

$$S = \int_{1/e}^{1} \frac{|\ln x|}{x}dx + \int_{1}^{e} \frac{|\ln x|}{x}dx = -\int_{1/e}^{1} \frac{\ln x}{x}dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} t\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt \ \ (\text{với } t = \ln x,\ dt = \frac{1}{x}dx)$$

$$= -\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2}(1-0) = 1 \ \text{(đvdt)}$$

x	-0		1		e		+∞
y'	‖	-		+	0	-	
y	‖ +∞	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

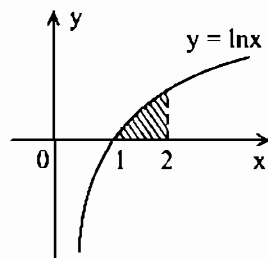


Ví dụ 15 : Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi : $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là :

$V = \pi\int_1^2 \ln^2 x dx$



Đặt : $u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x\frac{1}{x}dx$

$dv = dx,\ v = x$

Tích phân từng phần cho ta :

$$\int_1^2 \ln^2 x dx = x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x dx = 2\ln^2 2 - 2\int_1^2 \ln x dx$$

Lại đặt : $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta có : $\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$

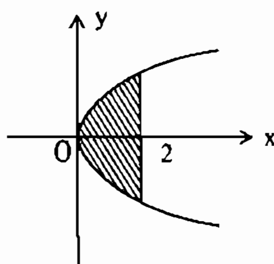
Do đó $V = \pi(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2) = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$

$= 2\pi(\ln 2 - 1)^2$ (đvtt).

Ví dụ 16 : Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi (P) : $y^2 = 8x$ và đường thẳng $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay khi lần lượt quay hình phẳng (H) quanh trục Ox và trụ Oy.

Hướng dẫn giải

Ta có (P) : $y^2 = 8x$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành là :



$V_1 = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 8x dx$

$= 4\pi x^2\Big|_0^2 = 16\pi$ (đvtt)

Ta lại có (P) : $x = \frac{y^2}{8}$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy là :

$$V_2 = \pi\int_{-4}^4 x^2 dy = \pi\int_{-4}^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{64}\int_{-4}^4 y^4 dy = \frac{\pi}{32}\int_0^4 y^4 dy = \frac{\pi}{160}y^5\Big|_0^5 = \frac{\pi}{160}.5^5 \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 17 : Cho hình tròn giới hạn bởi (C) :

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 \text{ (với } 0 < a \le b).$$

Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình tròn ấy quanh trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta có (C) : $y - b = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2} \\ y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \end{array}\right.$

Do đó thể tích khối tròn xoay khi quay hình tròn giới hạn bởi (C) quanh trục hoành là:

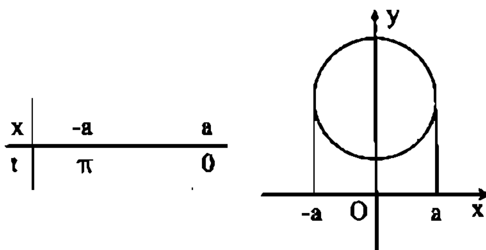
$$V = \pi\int_{-a}^{a} y_1^2 dx - \pi\int_{-a}^{a} y_2^2 dx = \pi\int_{-a}^{a}\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx$$

$$= \pi\int_{-a}^{a}\left(y_1 + y_2\right)\left(y_1 - y_2\right)dx = \pi\int_{-a}^{a} 2b.2\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Đổi biến số : $x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin tdt$

x	-a	a
t	π	0



$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_{\pi}^{0}\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}.(-a\sin t)dt$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\sin^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{\pi a^2}{2}$$

Do đó $V = 4\pi b.\dfrac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b$ (đvtt)

Ví dụ 18 : Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi : $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là :

$$V = \pi\int_0^1\left(xe^x\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x}dx$$

Đặt : $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có : $\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xe^{2x}dx$

Lại đặt : $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có : $\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

Do đó : $V = \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) = \pi\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$ (đvtt).

Ví dụ 19 : Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi : $y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là :

$$V = \pi\int_0^{\pi/2} y^2dx = \pi\int_0^{\pi/2}(\cos^6 x + \sin^6 x)dx$$

Ta có : $\cos^6 + \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3$

$$= \cos^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Do đó : $V = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2}(5 + 3\cos 4x)dx = \frac{\pi}{8}\left[\frac{5\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/2}\right]$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{5\pi}{2} + 0\right) = \frac{5\pi^2}{16} \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 20 : Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có (E) : $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là :

$$V = \pi\int_{a}^{a} y^2dx = \pi b^2\int_{a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dy$$

$$= \pi b^2\left[2a - \frac{1}{3a^2}x^3\Big|_{-a}^{a}\right] = \pi b^2\left[2a - \frac{2}{3}a\right] = \pi b^2\frac{4}{3}a$$

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ (đvtt)

§ 14. TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Dạng** $I = \int\frac{dx}{ax+b}$ $(a \neq 0)$: $I = \frac{1}{a}\int\frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2. **Dạng** $I = \int\frac{dx}{ax^2+bx+x}$ $(a \neq 0)$:

+ Nếu $\Delta > 0 : I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)dx$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C$$

+ Nếu $\Delta = 0 : I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-x_0)^2}$ (với $x_0 = -\frac{b}{2a}$) $= \frac{1}{a}.\frac{-1}{x-x_0} + C$

+ Nếu $\Delta < 0 : I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}.\arctan\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) + C$$

3. **Dạng** $I = \int\frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0, m \neq 0)$

Dùng phân tích $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\alpha.\frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\beta.\frac{1}{ax^2+bx+c}$

ta được : $I=\alpha\ln|ax^2+bx+c|+\beta\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

4. **Dạng** $I=\int\frac{P(x)dx}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$ (với P(x) là đa thức có bậc ≤ 2)

Dùng phân tích $f(x)=\frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$ ra các dạng như sau :

+ Nếu $\Delta>0,\ \alpha\neq x_{1,2}: f(x)=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-x_1}+\frac{C}{x-x_2}$

+ Nếu $\Delta=0,\ \alpha\neq x_0: f(x)=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-x_0}+\frac{C}{(x-x_0)^2}$ (với $x_0=-\frac{b}{2a}$).

+ Nếu $\Delta<0: f(x)=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

5. **Các dạng khác :**

Có thể kết hợp việc dùng công thức đổi biến số với kĩ thuật phân tích ra số hạng đơn giản hoặc tích phân từng phần.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; b) $\int\frac{2xdx}{2x^2-3x-2}$;

c) $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$; d) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;

e) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; g) $\int\frac{xdx}{x^4-3x^2+2}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Phân tích $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(2x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)}$

$$=\frac{1}{2x+1}+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{2x+1}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}$$

Do đó : $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}=\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}}=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+C.$

b) Ta có : $\frac{2x}{2x^2-3x-2}=\frac{\frac{1}{2}(4x-3)}{2x^2-3x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2x^2-3x-2)'}{2x^2-3x-2}+\frac{3}{4}.\frac{2}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$$

Do đó : $\int\frac{2xdx}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{2}\ln|2x^2-3x-2|+\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-2}{x+\frac{1}{2}}\right|+C.$

c) Phân tích : $\frac{1}{6x^3-7x^2-3x}=\frac{1}{x(6x^2-7x-3)}=\frac{1}{x(2x-3)(3x+1)}$

$$=\frac{a}{x}+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{3x+1}$$

Suy ra : $1=a(2x-3)(3x+1)+bx(3x+1)+cx(2x-3)$

Cho $x\to 0$ thì $a=-\frac{1}{3}$; $x\to\frac{3}{2}$ thì : $b=\frac{4}{33}$; $x\to-\frac{1}{3}$ thì : $c=\frac{9}{11}$.

Do đó : $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{4}{33}\int\frac{dx}{2x-3}+\frac{9}{11}\int\frac{dx}{3x+1}$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|+\frac{3}{11}\ln|3x+1|+C.$$

d) Ta có : $\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{4}\frac{(4x^3-x)+x-4}{4x^3-x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-4}{x(4x^2-1)}$

Phân tích : $\frac{x-4}{x(4x^2-1)}=\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{2x+1}$

Suy ra : $x-4=a(2x-1)(2x+1)+bx(2x+1)+cx(2x-1)$

Cho $x\to 0$ thì : $a=4$; $x\to\frac{1}{2}$ thì : $b=-\frac{7}{2}$; $x\to-\frac{1}{2}$ thì : $c=-\frac{9}{2}$.

Do đó : $\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{4}{x}-\frac{7}{2(2x-1)}-\frac{9}{2(2x-1)}\right]$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{7}{16\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{9}{16\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

Suy ra : $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| - \frac{9}{16}\ln\left|x + \frac{1}{2}\right| + C.$

e) Ta có : $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + 4.\frac{x^2 + 4x - 4}{x(x^2 - 4)}$

$$= x^2 + x + 4 + 4\left[\frac{x^2 - 4}{x(x^2 - 4)} + \frac{4x}{x(x^2 - 4)}\right]$$

$$= x^2 + x + 4 + \frac{4}{x} + \frac{16}{x^2 - 4}$$

$$= x^2 + x + 4 + \frac{4}{x} + 4\left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right)$$

Do đó : $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x| + 4\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C.$

g) Đổi biến số $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$, ta có :

$$\int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t - 1)(t - 2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t - 2}{t - 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}\right| + C.$$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau đây :

a) $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$; b) $\int \frac{x^3dx}{x^4 - 4x^2 + 3}$;

c) $\int \frac{x^5dx}{x^6 - x^3 - 2}$; d) $\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)}dx$;

Hướng dẫn giải

a) $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \int \frac{dx}{3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + \frac{1}{3}}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 1}{x + \frac{1}{3}}\right| + C.$$

b) Đổi biến số $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$, ta có :

$$\int\frac{x^3dx}{x^4-4x^2+3} = \int\frac{x^2.xdx}{x^4-4x^2+3} = \frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t^2-4t+3} = \frac{1}{2}\int\frac{t}{(t-1)(t-3)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{t-1}{(t-1)(t-3)} + \frac{1}{(t-1)(t-3)}\right]dt = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t-3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-1}\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{t-3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{3}{4}\ln|t-3| - \frac{1}{4}\ln|t-1| + C$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x^2-3| - \frac{1}{4}\ln|x^2-1| + C.$$

c) Đổi biến số $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$, ta có :

$$\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2} = \int\frac{x^3.x^2dx}{x^6-x^3-2} = \frac{1}{3}\int\frac{tdt}{t^2-t-2} = \frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t+1)(t-2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[\frac{t+1}{(t+1)(t-2)} - \frac{1}{(t+1)(t-2)}\right]dt = \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{t-2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{t-2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{2}{9}\ln|t-2| + \frac{1}{9}\ln|t+1| + C$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x^3-2| + \frac{1}{9}\ln|x^3+1| + C.$$

d) $$\frac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{x^3+2x^2+x}{x(x^2+2x+1)} - \frac{2x^2+4x-2}{x(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{2(x+1)^2-4}{x(x+1)^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x(x+1)^2}$$

Ta phân tích : $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

Suy ra : $1 = a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx$

Cho $x \to 0$ thì $a = 1$; $x \to -1$ thì $c = -1$;

$x \to 1$ thì $4a + 2b + c = 1 \Rightarrow b = -1$.

Do đó : $\dfrac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = 1 - \dfrac{2}{x} + 4\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

nên : $\displaystyle\int\frac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = x - 2\ln|x| + 4\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{4}{x+1} + C$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau đây :

a) $\int\frac{dx}{x(x^2+2)}$; b) $\int\frac{dx}{(x^2-4)(x^2-1)}$;

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số : $t=x^2$, $dt=2xdx$ thì :

$$\int\frac{dx}{x(x^2+2)}=\int\frac{xdx}{x^2(x^2+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+2)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)+C.$$

b) $$\int\frac{dx}{(x^2-4)(x^2-1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

c) $$\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x^2-9)}=\int\left[\frac{x^2-9}{(x^2-1)(x^2-9)}+\frac{9}{(x^2-1)(x^2-9)}\right]dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^2-1}+9.\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\frac{9}{8}\int\frac{dx}{x^2-9}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Ví dụ 4 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$; b) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$;

c) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; d) $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số : $t=x^{10}+1\Rightarrow dt=10x^9dx$

$$\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}=\int\frac{x^9dx}{x^{10}(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{10}\int\frac{dt}{(t-1)t^2}$$

Phân tích : $\frac{1}{(t-1)t^2}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$ nên ta có :

$$\int\frac{dx}{x\left(x^{10}+1\right)^2}=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+\frac{1}{10t}+C$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right)+\frac{1}{10\left(x^{10}+1\right)}+C.$$

b) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx\ \int\frac{dt}{t^2-2}\left(t=x+\frac{1}{x}\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

c) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx=\int\frac{dt}{t^2+2}\left(t=x-\frac{1}{x}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Ví dụ 5 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; b) $\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}$; c) $\int\frac{x^3dx}{\left(x^8+1\right)^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số : $t=x^2+1\Rightarrow dt=2x\,dx$ thì :

$$\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\int\frac{x^2.xdx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{1}{t}\right)+C=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\right]+C.$$

b) $I=\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{x^2+2}{(x^2+2)^2}-\frac{x^2}{(x^2+2)^2}\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\int x.\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx$$

Đặt : $u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx\Rightarrow v=-\frac{1}{x^2+2}$$

Ta có : $\int x.\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx=-\frac{x}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}=-\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

Do đó : $I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{x^2+2}+C.$

c) $J=\int\frac{x^3dx}{(x^8+1)^2}$. Đổi biến số $t=x^4\Rightarrow dt=4x^3dx$

$J=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$. Lại đặt $t=\tan u\Rightarrow dt=(1+\tan^2u)du$

Ta có : $J=\frac{1}{4}\int\frac{(1+\tan^2u)du}{(1+\tan^2u)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{1+\tan^2u}=\frac{1}{4}\int\cos^2u\,du=\frac{1}{8}\int(1+\cos2u)du$

$$=\frac{1}{8}\left(u+\frac{1}{2}\sin2u\right)+C=\frac{u}{8}+\frac{1}{16}.\frac{2\tan u}{1+\tan^2u}+C=\frac{1}{8}\arctan x^4+\frac{1}{8}.\frac{x^4}{1+x^8}+C.$$

Ví dụ 6 :

a) Tìm a, b, c để với mọi $x\neq-1$ thì có :

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{c}{x^2-x+1}\qquad(*)$$

b) Tính $\int\frac{xdx}{x^3+1}$ và $\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{xdx}{x^3+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Từ (*) ta suy ra : $x=a(x^2-x+1)+b(2x-1)(x+1)+c(x+1)$

$$\Leftrightarrow x=(a+2b)x^2+(c+b-a)x+(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ c+b-a=1 \\ a+c-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{6} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Ta có : $\int \frac{xdx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$-\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$$

Ta có : $\int_0^n \frac{xdx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big|_0^n + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^n$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(n-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Khi $n \to \infty$ thì : $\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} \to 1$; $\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(n-\frac{1}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}$

Suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{xdx}{x^3+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

§ 15. TÍCH PHÂN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Xét tích phân có dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$ với $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $t = \cos x$.

Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $t = \sin x$.

Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $t = \tan x$.

Nếu cả 3 cách trên đều không sử dụng được thì đổi biến số $t = \tan\frac{x}{2}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân :

a) $\int \cos^2 x dx$;

b) $\int \sin^2 x dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

d) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

b) $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$

c) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{-dt}{1-t^2}$

(Đặt : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$)

$$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

d) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{1-t^2}$

(Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$)

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

b) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$;

c) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

d) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sin t}$ (với $t = x + \frac{\pi}{4}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2-1} \quad (u = \cos t)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}\right| + C.$$

b) $$\int \frac{dx}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\cos t}\left(t = x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{1-u^2} \ (u = \sin t)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}\right| + C.$$

c) $$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sin^2\frac{x}{2}} = -\cot\frac{x}{2} + C.$$

d) $$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = -\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$;

b) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$;

c) $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx$;

d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$.

Hướng dẫn giải

a) $$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx = 2\int \tan^2 dt \ \left(\text{với } t = \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\int (1 + \tan^2 t - 1)dt = 2(\tan t - t) + C = 2\left(\tan\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

b) $\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx=\int\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\tan^2 x\right)dx$

$$=\tan x+\frac{2}{\cos x}+\tan x-x+C.$$

c) $\int(\tan^2 x+\tan^4 x)dx=\int\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\int t^2dt\ (t=\tan x)=\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

d) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(1-t^2)dt}{t}\ (t=\cos x)$

$$=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\ln|t|+C=\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

Ví dụ 4 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\sin 2x\cos xdx$;   b) $\int\cos 2x\cos 3xdx$;   c) $\int\sin 2x\sin 5xdx$.

Hướng dẫn giải

a) $\int\sin 2x\cos xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3}+\cos x\right)+C$

b) $\int\cos 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right)+C.$

c) $\int\sin 2x\sin 5xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos 7x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{7}\sin 7x\right)+C.$

Ví dụ 5 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\cos^3 x\sin^4 xdx$;   b) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$;

c) $\int\tan^4 xdx$;   d) $\int\sin^5 xdx$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ thì :

$\int\cos^3 x\sin^4 xdx=\int\cos^2 x.\sin^4 x.\cos xdx=\int(1-t^2)t^4dt$

$$=\int(t^4-t^6)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+C=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

b) Đổi biến số $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ thì :

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x).\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2)dt$$

$$= t + \frac{1}{3}t^3 + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$$

c) Đổi biến $t = \tan x \Rightarrow dt = (1+\tan^2 x)dx$ thì :

$$\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)dx - \int (1+\tan^2 x)dx + \int dx$$

$$= \int t^2 dt - \tan x + x = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

d) Đổi biến số $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ thì ta có :

$$\int \sin^5 dx = \int (1-\cos^2 x)^2.\sin x dx = -(1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^2+t^4)dt$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Ví dụ 6 : Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x.\cos 2x}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$.

Hướng dẫn giải

a) *Trường hợp 1 :* $a = 0, b \neq 0$

$$I = \int \frac{dx}{b\sin x} = \frac{1}{b}\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t^2-1} \; (t = \cos x)$$

$$= \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

Trường hợp 2 : $a \neq 0, b = 0$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{a}\int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1-t^2} \; (t = \sin x)$$

$$= -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Trường hợp 3 : $a \neq 0, b \neq 0$

Ta có : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

(với $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\cos(x-\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dt}{\cos t} \text{ (với } t = x-\varphi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\cos t\,dt}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{du}{1-u^2} \text{ (với } u = \sin t)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\sin(x-\varphi)-1}{\sin(x-\varphi)+1}\right| + C.$$

b) $\int\frac{dx}{\tan x\cos 2x} = \int\frac{\cos x\,dx}{\sin x(1-2\sin^2 x)} = \int\frac{dt}{t(1-2t^2)}$ (với $t = \sin x$)

Phân tích : $\frac{1}{t(1-2t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \frac{1}{2\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, nên :

$$\int\frac{dx}{\tan x\cos 2x} = \ln|\sin x| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C.$$

c) Đổi biến số : $t = \tan x \Rightarrow dt = (1+\tan^2 x)dx$.

$$I = \int\frac{dx}{1+\tan x} = \int\frac{(1+\tan^2 x)dx}{(1+\tan x)(1+\tan^2 x)}$$

$$= \int\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1-t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\arctan - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\tan x + 1| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(\tan^2 x + 1) + C.$$

Ví dụ 7 : Tính các tích phân sau :

a) $I = \int\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$ và $J = \int\frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$;

b) $I = \int\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$ và $J = \int\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $I + J = \int\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int dx = x + C$ (1)

$$I - J = \int\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \ln|\cos x + \sin x| + C \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) suy ra : $I = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C$

Trừ (1) cho (2) suy ra : $J = \frac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C$.

b) Ta có : $I - J = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x}dx = \int dx = x + C$ (1)

Ta lại có : $I + J = \int\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos 2x}dx = \int\frac{dx}{\cos 2x} = \int\frac{\cos 2x}{1 - \sin^2 2x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1 - t^2} \text{ (với } t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right| + C \quad (2)$$

Cộng vế (1) và (2) ta được : $I = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right|\right) + C$

Trừ vế (2) với (1) thì : $J = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right|\right) + C$.

Ví dụ 8 : Tính các tích phân sau đây :

a) $\int\frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$ $(a - b \neq k\pi)$;

b) $\int\frac{dx}{\sin x - \sin a}$ $(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$;

c) $\int\frac{dx}{\cos(x + a)\cos(x + b)}$ $(a - b \neq k\pi)$;

d) $\int\frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$ $(a^2 \neq b^2)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \ \ (\text{vì } \sin(a-b) \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \sin(x+b)\cos(x+a)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a+b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a+b)} \left[\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)| \right] + C.$$

b) Ta có : $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2\cos a} \int \frac{\cos\left[\left(\frac{x+a}{2}\right) - \left(\frac{x-a}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2\cos a} \int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2\cos a} \int \left[\frac{\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\cos a} \left[\ln\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| - \ln\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \right] + C.$$

c) Ta có : $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a)\cos(x+b)} dx$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \sin(x+b)\cos(x+a)}{\cos(x+a)\cos(x+b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[-\ln\left|\cos(x+a)\right| + \ln\left|\cos(x+b)\right|\right] + C.$$

d) Đổi biến số : $t = \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \Rightarrow t^2 = a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x$

$$\Rightarrow 2tdt = 2\left(a^2 - b^2\right)\sin x\cos xdx$$

Ta có : $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos xdx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2 - b^2}\int\frac{tdt}{t}$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\int dt = \frac{1}{a^2 - b^2}t + C = \frac{1}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + C$$

Ví dụ 9 : Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$; c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 x\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

Do đó : $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4 xdx = \frac{3}{8}\int_0^{\pi}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xdx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos 4xdx$

$$= \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{32}\sin 4x\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{8}\pi.$$

b) Ta có : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx = 4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\sin xdx$

$$4\int_0^{\pi/4}(1-\cos x)\sin xdx = 4\int_0^{\pi/2}\sin xdx - 2\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx$$

$$= -4\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = 4(-2) = 2.$$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}dx$

$$= \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|dt\left(t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx\right)=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin tdt-2\sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin tdt$$

$$=-2\sqrt{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+2\sqrt{2}\cos t\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}=-2\sqrt{2}\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=4\sqrt{2}$$

Ví dụ 10 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$; b) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$, ta có :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)(1+\cos x+\sin x)}$$

$$=\int_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int_0^1\frac{2dt}{2+2t}=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln 2.$$

b) Ta có : $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=4\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\sin^2 2x}$

$$=2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{2dx}{\sin^2 2x}=-2\cot 2x\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}=-2\left(\cot\frac{3\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-2(-1-1)=4.$$

Ví dụ 11 : Cho các số nguyên m, n, k với $m\neq\pm k$, $m\neq\pm n$. Hãy tính :

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos kxdx \text{ và } J=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+k)+\cos(m-k)x]dx$

$$= \frac{1}{2(m+k)}\sin(m+k)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-k)}\sin(m-k)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\ ;$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2(n+m)}\cos(n+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(n-m)}\cos(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ví dụ 12 : Cho n là số nguyên dương. Hãy tính các tích phân sau :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx \ \text{ và } \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx.$$

Hướng dẫn giải

Đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt.$

Ta có : $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt}{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t dt}{\sin^n t + \cos^n t} = J.$

Ta lại có : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}.$

Ví dụ 13 :

a) Tìm a, b, c để $\frac{1}{\cos x} = a\frac{\cos x}{1-\sin x} + b\frac{\cos x}{1+\sin x}$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

b) Suy ra cách tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}.$

Hướng dẫn giải

a) Từ : $\frac{1}{\cos x} = a\frac{\cos x}{1-\sin x} + b\frac{\cos x}{1+\sin x}$ (*)

Suy ra : $\cos x = a\cos x(1+\sin x) + b\cos x(1-\sin x)$

Hay : $\cos x = (a+b)\cos x + (a-b)\sin x\cos x$

Với $x = 0$ thì $a + b = 1$ (1)

Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2} + (a-b)\frac{1}{2} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = \frac{1}{2}$

Với $a = b = \frac{1}{2}$ thế vào (*) thì thoả mãn.

b) Theo câu a) ta có :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1 - \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \ln|1 + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 \right] + \frac{1}{2}\left[\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right).$$

Ta có : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt : $u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \tan x$

Tích phân từng phần cho ta :

$$J = \frac{tgx}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \sqrt{2} - J + I$$

Suy ra : $J = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + I) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \right].$

§ 16. TÍCH PHÂN HÀM SỐ VÔ TỈ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Với dạng $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (trong đó R là hàm hữu tỉ) : Đổi biến số $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

2. Với $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$:

Cách 1 : Đổi biến số : $t = \sqrt{ax^2+bx+c}$

Cách 2 : Với dạng $\sqrt{A^2-x^2}$ thì đổi biến số $x = A\cos t$

Với dạng $\sqrt{A^2+x^2}$ thì đổi biến số $x = A\tan t$

Với dạng $\sqrt{x^2-A^2}$ thì đổi biến số $x = \frac{A}{\cos t}$

3. Với $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$: đổi biến số $t = \frac{1}{mx+n}$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

b) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

d) $\int x\sqrt{3-x}\,dx$;

e) $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$;

g) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số $t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x+1 = t^2dt = dx$

Ta có : $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx = \int \frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t}.t^2dt = \frac{1}{3}\int (t^3+2)tdt$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{t^5}{5} + t^2\right) + C = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^5} + \sqrt[3]{(3x+1)^2}\right] + C$$

b) Đổi biến số $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow tdt = dx$

Ta có : $\displaystyle\int\frac{xdx}{1+\sqrt{2x+1}} = \int\frac{\frac{1}{2}(t^2-1)dt}{1+t}$

$$= \frac{1}{2}\int(t-1)tdt = \frac{1}{2}\int(t^2-1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{1}{4}\sqrt{(2x+1)^2} + C$$

c) Đổi biến số $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow t^6 = x \Rightarrow dx = 6t^5dt$

Ta có : $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^3}{t+1}dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$$

d) Đổi biến số $t = \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 3-x \Rightarrow tdt = -dx$

Ta có : $\displaystyle\int x\sqrt{3-x}\,dx = -\int(3-t^2)t.t.dt = \int(t^4-3t^2)dt = \frac{1}{5}t^5 - t^3 + C$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{(3-x)^5} - \sqrt{(3-x)^3} + C.$$

e) Đổi biến số : $t = \sqrt[3]{x^4+1} \Rightarrow t^3 = x^4+1 \Rightarrow 3t^2dt = 4x^3dx$

Ta có : $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{3}{4}\int\frac{t^2dt}{1+t} = \frac{3}{4}\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\right) + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^4+1)} + \frac{3}{4}\ln\left|1+\sqrt[3]{x^4+1}\right| + C$$

g) Đổi biến số $t = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow t^2 = x^2+2 \Rightarrow tdt = xdx$

Ta có : $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{x^2xdx}{\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{(t^2-2)tdt}{t} = \int(t^2-2)dt$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 2t + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} - 2\sqrt{x^2+2} + C.$$

Ví dụ 2 : Tính các tích phân sau đây :

a) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{1}{x}dx$; b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$; c) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Rightarrow t^2=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow t^2+t^2x=1-x$

$$\Rightarrow x=\frac{-t^2+1}{t^2+1}\Rightarrow dx=\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt$$

Ta có : $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{1}{x}dx=\int t.\frac{t^2+1}{-t^2+1}.\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt=4\int\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt$

$$=4\int\left[\frac{t^2+1}{(t^2-1)(t^2+1)}-\frac{1}{(t^2-1)(t^2+1)}\right]dt=4\int\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)\right]dt$$

$$=4\int\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{t^2+1}-\frac{2}{t^2-1}\right)dt=6\arctan t-4\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=6\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-4\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C.$$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right]+C.$

c) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}dx$

$$=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}J,$$

với $J=\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

Đổi biến số : $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}\Rightarrow t^2=\frac{1+x}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$

Ta có : $J=\int t.\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt.$

Đặt : $u = t \Rightarrow du = dt$; $dv = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt \Rightarrow v = \frac{1}{t^2-1}$.

Tích phân từng phần cho ta : $J = \frac{t}{t^2-1} - \int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$

Do đó : $I = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right|\right) + C.$

Ví dụ 3 : Tính các tích phân sau :

a) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$; c) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến số : $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$

Ta có : $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{tdt}{(t^2-1)t} = \int\frac{dt}{t^2-1}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) + C.$$

b) Đổi biến số : $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dt = -\frac{1}{t^2}dt$

Ta có : $I = \int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}} = \int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}+1}}$

$$= -\int\frac{\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{|t|}\sqrt{2+2t+t^2}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+1}}$$

(nếu $t > 0$)

$$= -\ln\left|t+1+\sqrt{(t+1)^2+1}\right| + C$$

Vậy : $I = \begin{cases} -\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}\right|+C \text{ nếu } x>0 \\ \ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}\right|+C \text{ nếu } x<0 \end{cases}$

c) Đổi biến số : $t=\sqrt{x^2+2x+2} \Rightarrow t^2=x^2+2x+2 \Rightarrow tdt=(x+1)dx$

Ta có : $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{(x+1)dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$=\int\frac{tdt}{(t^2-1)t}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+1}\right|+C.$$

Ví dụ 4 : Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$; b) $\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$; c) $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi biến : $x=2\cos t \Rightarrow dx=-2\sin tdt$

Khi $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{2}$; khi $x=2$ thì $t=0$.

Ta có : $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{4-4\cos^2 t}.(-2\sin t)dt$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt$$

$$=2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\pi$$

b) Đổi biến số : $x=\cos t \Rightarrow dx=-\sin tdt$

Khi $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{2}$; khi $x=1$ thì $t=0$

Ta có : $I=\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\sin tdt}{\cos t+\sqrt{1-\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt$

Xét : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$, ta có :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$$J = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} dt = \ln|\cos t + \sin t|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = J = \dfrac{\pi}{4}$

c) Đổi biến số : $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

Ta có : $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} - 1} = \int_2^3 \frac{t.2tdt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int_2^3 \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$

$$= t^2\Big|_2^3 + 2 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 = 5 + 2 + 2\ln 2.$$

Ví dụ 5 : Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$; b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$

Hướng dẫn giải

a) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin t(-\sin t)dt}{\cos^6 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}.\frac{1}{\cos^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$= \int_0^1 u^2.(1+u^2)du \ \ (\text{với } u = \tan t \Rightarrow du = \frac{dt}{\cos^2 t})$$

$$= \int_0^1 (u^2 + u^4)du = \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 + \frac{1}{5}u^5\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

b) Đổi biến số $x = \tan t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$

Khi $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$; khi $x = \sqrt{3}$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$

Ta có : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos t}dt}{\tan^2 t.\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos tdt}{\sin^2 t.\cos^2 t} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u^2(1-u^2)}$$

(với $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$)

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right) du = -\frac{1}{u}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right| - \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\right|\right) = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\ln}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}.\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1}\right)$$

C. LUYỆN TẬP

3.1 Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; b) $\int e^x \sin(e^x) dx$; c) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}$.

3.2 Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$; b) $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$; c) $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$.

3.3 Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \le 1$; b) $\frac{2}{5} \le \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$.

3.4 Chứng minh rằng với $\alpha \in \mathbf{R}$, ta có : $-1 \le \int_0^1 \frac{x\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{2x+1}}{x+1} dx \le 1$.

3.5 Chứng minh rằng : $-\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+a^2+b^2} dx \le \frac{\pi}{4}$.

3.6 Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx (n = 1, 2, 3, \ldots)$

a) Lập hệ thức giữa I_n và I_{n+2} ;

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3.7 Chứng minh rằng : $\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{1}{2}$.

3.8 Cho f(x) và g(x) là hai hàm số xác định và liên tục trên đoạn [0 ; 1]. Chứng minh

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx.\int_0^1 g^2(x)dx.$$

3.9 Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \, (n = 1, 2, 3, \ldots)$

a) Lập hệ thức giữa I_n và I_{n-2}; b) Chứng minh $nI_n.I_{n-1}$ độc lập với n ;

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$.

3.10 a) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$; b) Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx$;

c) Chứng minh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x dx}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)} \ge \frac{\pi}{12}$.

3.11 Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$; b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$.

3.12 Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$; b) $J = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$; c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$.

3.13 Cho miền D giới hạn bởi $x^2 + y - 5 = 0$ và $x + y - 3 = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành.

3.14 Tính diện tích miền D giới hạn bởi $y^2 + x - 5 = 0$ và $x + y - 3 = 0$.

3.15 Tính :

a) $\int \tan^4 x dx$; b) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+5}$.

3.16 Tính :

a) $\int \frac{x^4+2x^2+x+2}{x^2+x+1}dx$; b) $\int \cos^3 x \cos 3x dx$.

3.17 Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 4x dx$.

3.18 Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 2x dx$

3.19 Tính : $I = \int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$.

3.20 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{3} \text{ với } y = \frac{7-x}{x-3}.$$

3.21 Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right)dx$;

b) $J = \int_0^{\pi} |\cos x|.\sqrt{\sin x}dx$.

3.22 Tính các diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = \sqrt{x}$ và $y = x^2$.

3.23 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho miền (D) giới hạn bởi :

$$x = \frac{1}{4}y^2 (y \le 0),\ x = -\frac{1}{2}y^2 + 3y (y \le 2) \text{ và } x = 4.$$

a) Tính diện tích của miền (D) ;

b) Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay (D) quanh Ox.

3.24 Cho hàm số : $f(x) = 4\cos x + 3\sin x$ và $g(x) = \cos x + 2\sin x$

a) Tìm các số a, b sao cho $g(x) = af(x) + bf'(x)$;

b) Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{f(x)}dx$.

3.25 Tính diện tích miền (D) giới hạn bởi : $y = x^2$, $y = \frac{1}{27}x^2$ và $y = \frac{27}{x}$.

3.26 Tính : $I = \int x\sin\sqrt{x}dx$.

3.27 Tính : $I = \int \frac{x^6 + x^5 + x^4 + 2}{x^6 + 1}dx$.

3.28 Tính : $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$ và $J = \int_{-2}^{2}\left(10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x\right)dx$.

3.29 Cho S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$, $y = 1$, $y = 2$, $x \ge 0$.

a) Tính S khi a = 2 ;

b) Tìm a ($a \ge 1$) sao cho S đạt giá trị lớn nhất.

Phần II.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Chương 4.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quy tắc nhân :

Giả sử một hành động H gồm k giai đoạn liên tiếp. Ở giai đoạn 1 có m_1 cách chọn, ở giai đoạn 2 có m_2 cách chọn, ..., ở giai đoạn k có m_k cách chọn. Thế thì có tất cả : $m_1.m_2.\ldots m_k$ cách chọn để thực hiện hành động H.

2. Hoán vị :

Mỗi cách sắp đặt các phần tử của một tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$) theo một thứ tự nhất định gọi là một *hoán vị của n phần tử.*

Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n,, ta có công thức :

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n!$$

3. Chỉnh hợp :

Cho một tập hợp gồm n phần tử, $n \geq 1$. Lấy ra k phần tử ($1 \leq k \leq n$). Sắp xếp k phần tử này theo một thứ tự nhất định gọi là một *chinh hợp chập k cua n phần tử.*

Kí hiệu số chinh hợp k của n phần tử là A_n^k, ta có công thức :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chú ý : Quy ước 0! = 1.

4. Tổ hợp :

a) Cho một tập hợp A gồm n phần tử. Một tập con của A gồm k phần tử ($0 \leq k \leq n$) được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử.*

Kí hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k, ta có công thức :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Chú ý : $C_n^0 = C_n^n = 1$.

b) Một số công thức về tổ hợp :

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

5. Nhị thức Niutơn :

$$(a+b)^2 = C_n^0 n^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Các bài toán về Đại số tổ hợp thường là những bài toán về những hành động như : lập các số từ những chữ số đã cho, sắp xếp một số người hay đồ vật vào những vị trí nhất định, lập các nhóm người hay đồ vật thoả mãn một số điều kiện đã cho v.v...

1. Nếu những hành động này gồm nhiều giai đoạn thì cần tìm số cách chọn cho mỗi giai đoạn rồi áp dụng quy tắc nhân.
2. Những bài toán mà kết quả thay đổi nếu ta thay đổi vị trí của các phần tử, thì đây là những bài toán liên quan đến hoán vị và chỉnh hợp.
3. Đối với những bài toán mà kết quả được giữ nguyên khi ta thay đổi vị trí của các phần tử, thì đây là những bài toán về tổ hợp.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

1. Quy tắc nhân

Ví dụ 1 : Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

(Trích đề thi ĐHSP Vinh, khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là một số thoả mãn điều kiện bài toán. Vì $a_1 \neq 0$ nên có 7 cách chọn a_1.

Vì x không chia hết cho 10 nên $a_4 \neq 0$ và $a_4 \neq a_1$ nên sau khi đã chọn a_1 thì có 6 cách chọn a_4.

Vậy có 7.6 = 42 cách chọn a_1, a_4.

Sau khi đã chọn a_1 và a_4 thì chỉ còn 6 cách chọn a_2 trong các chữ số còn lại.

Cuối cùng, khi đã chọn a_1, a_2, a_4 thì chỉ còn 5 cách chọn a_3, trong các chữ số còn lại.

Vậy có thể lập được : 7.6.6.5 = 1260 số thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2 : Có 5 miếng bìa, trên mỗi miếng ghi một trong 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Lấy 3 miếng từ 5 miếng bìa này đặt lần lượt cạnh nhau từ trái sang phải để được các số gồm 3 chữ số.

Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có nghĩa gồm 3 chữ số và trong đó có bao nhiêu số chẵn ?

(Trích đề thi CĐSP Hà Nội, khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu $x = \overline{a_1a_2a_3}$ là một số thoả mãn điều kiện bài toán.

Vì $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn miếng bìa cho a_1.

Sau khi đã chọn một miếng bìa cho a_1 thì còn 4 cách chọn miếng bìa cho a_2.

Cuối cùng, còn 3 cách chọn miếng bìa cho a_3.

Vậy theo quy tắc nhân, số các số lập được là :

4.4.3 = 48 số

b) Nếu số lập được là một số lẻ thì có 2 cách chọn cho hàng đơn vị a_3.

Tiếp theo, có 3 cách chọn cho hàng trăm a_1.

Cuối cùng, còn 3 cách chọn cho hàng chục a_2.

Vậy số các số lẻ là : 3.3.2 = 18 số.

Và số các số chẵn lập được là : 48 – 18 = 30 số.

Ví dụ 3 : Một người có 6 cái áo, trong đó có 3 áo sọc và 3 áo trắng ; có 5 quần, trong đó có 2 quần đen ; và có 3 đôi giày, trong đó có 2 đôi giày đen. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn mặc áo – quần – giày, nếu :

a) chọn áo, quần và giày nào cũng được.

b) nếu chọn áo sọc thì với quần nào và giày nào cũng được ; còn nếu chọn áo trắng thì chỉ mặc với quần đen và đi giày đen.

Hướng dẫn giải

a) Nếu chọn áo, quần và giày nào cũng được thì có 6 cách chọn áo, 5 cách chọn quần và 3 cách chọn giày, do đó có tất cả 6.5.3 = 90 cách chọn.

b) Nếu chọn áo sọc thì có 3 cách chọn, ứng với 5 cách chọn quần và 3 cách chọn giày. Vậy có : 3.5.3 = 45 cách chọn.

Nếu chọn áo trắng thì có 3 cách chọn áo, 2 cách chọn quần đen và 2 cách chọn giày đen. Vậy có : 3.2.2 = 12 cách chọn.

Do đó tổng số cách chọn trong trường hợp này là :

45 + 12 = 57 cách chọn.

2. Hoán vị

Ví dụ 4 : Có 7 người bạn A, B, C, D, E, G, H chụp ảnh chung. Họ muốn chụp ảnh chung bằng cách đổi chỗ đứng lẫn nhau, nhưng bộ ba A, B, C bao giờ cũng đứng kề nhau theo thứ tự đó. Hỏi có bao nhiêu bức ảnh khác nhau ?

Hướng dẫn giải

Vì bộ ba ABC đứng kề nhau theo thứ tự đó, nên các vị trí còn lại dành cho D, E, G, H. Do đó ta có thể coi là có 5 vị trí khác nhau như sau :



Khi hoán đổi các vị trí này, ta được một hoán vị của 5 phần tử. Vậy số bức ảnh khác nhau là :

$$P_5 = 5! = 120 \text{ bức ảnh.}$$

Ví dụ 5 :

1) Có bao nhiêu số tự nhiên (được viết trong hệ đếm thập phân) gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau.

2) Hãy tính tổng của tất cả các số tự nhiên nói trên.

(Trích đề thi Đại học Huế, khối D, năm 1997)

Hướng dẫn giải

1) Các chữ số lớn hơn 4 là 5, 6, 7, 8, 9. Số các số gồm 5 chữ số lập nên từ các chữ số đó là hoán vị của 5 phần tử, tức là :

$$P_5 = 5! = 120.$$

2) Trong 120 số vừa tìm được, có 24 số ở hàng đơn vị là chữ số 5, có 24 số ở hàng đơn vị là chữ số 6, ..., có 24 số ở hàng đơn vị là chữ số 9. Như vậy khi lấy tổng các số đó, thì tổng các số ở hàng đơn vị là :

24.5 + 24.6 + 24.7 + 24.8 + 24.9 = 24(5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 24.35 = 840.

Tương tự như vậy cho tổng các chữ số ở hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn, hàng vạn.

Vậy tổng tất cả các chữ số nói trên là :

$$840(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 840.11111 = 9333240.$$

Ví dụ 6 : Có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho :

a) Bạn C ngồi chính giữa ;

b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế.

(Trích đề thi Đại học Hàng hải Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Khi bạn C ngồi chính giữa thì 4 vị trí còn lại là một hoán vị của 4 phần tử. Do đó số cách sắp xếp khác nhau là :

$$P_4 = 4! = 24$$

b) Có 2 cách xếp để hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế là A ... E và E ... A. Với mỗi cách xếp này ở 3 vị trí còn lại là một hoán vị của 3 phần tử. Vậy số cách xếp trong trường hợp này là :

$$2.P_3 = 2.3! = 12.$$

Ghi chú : Đề bài không nói rõ các yêu cầu cả hai điều kiện a) và b) đồng thời xảy ra hay không. Nếu cả hai điều kiện a) và b) đồng thời xảy ra thì sau khi đã sắp C ở vị trí chính giữa và A, E ở hai đầu ghế, ta chỉ còn 2 vị trí tự do cho hai bạn, nghĩa là một hoán vị của 2 phần tử. Trong trường hợp này số cách sắp xếp là :

$$2.P_2 = 2.2! = 4$$

Ví dụ 7 : Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau lấy từ các số 0, 2, 3, 6, 9.

(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Kí hiệu $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là một số thoả mãn điều kiện bài toán.

Vì x là một số chẵn nên $a_5 \in \{0, 2, 6\}$.

Nếu chọn $a_5 = 0$ thì có 4 cách chọn a_1, còn 3 vị trí a_2, a_3, a_4 sẽ là một hoán vị của 3 số còn lại. Vậy với $a_5 = 0$ thì có tất cả 4.3! = 24 số x.

Với $a_5 = 2$ hoặc $a_5 = 6$ thì có 2 cách chọn a_5. Ứng với mỗi cách chọn này có 3 cách chọn $a_1 (a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_5)$, còn 3 vị trí a_2, a_3, a_4 cũng là một hoán vị của 3 số còn lại. Do đó có tất cả 2.3.3! = 36 số x ứng với $a_5 = 2$ hoặc $a_5 = 6$.

Vậy số các số chẵn lập được là : 24 + 36 = 60 số.

3. Chỉnh hợp

Ví dụ 8 : Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được :

1) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau ?

2) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

(Trích đề thi Cao đẳng Hải quan, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Cách giải bài này tương tự Ví dụ 7, tuy nhiên ở đây là chỉnh hợp chứ không phải hoán vị.

1) Kí hiệu $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó các chữ số $a_i, i \geq 2$ thuộc tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, riêng $a_1 \in A \setminus \{0\}$.

Có 6 cách chọn a_1, ứng với mỗi cách chọn a_1 thì ở 4 vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử của tập $A \setminus \{a_1\}$.

Vậy có thể lập được : $6.A_6^4 = 6.6.5.4.3 = 2160$ số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ các số thuộc tập A.

2) Nếu x là một số chẵn thì $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$.

– Nếu chọn $a_5 = 0$ thì có 6 cách chọn a_1, còn 3 vị trí a_2, a_3, a_4 là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử thuộc tập $A \setminus \{0, a_1\}$.

Vậy ta có : $6.A_5^3 = 6.5.4.3 = 360$ cách chọn các số chẵn ứng với $a_5 = 0$.

– Nếu chọn $a_5 \in \{2, 4, 6\}$ thì có 3 cách chọn a_5 và ứng với mỗi cách chọn a_5 đó có 5 cách chọn $a_1 (a_1 \neq 0, a_1 \neq a_5)$, còn 3 vị trí a_2, a_3, a_4 là một chỉnh hợp chập 3 của 5 số còn lại của tập A. Do đó có tất cả $3.5.A_5^3 = 3.5.5.4.3 = 900$ số chẵn ứng với $a_5 \in (2, 4, 6)$.

Vậy ta có thể lập được : 360 + 900 = 1260 số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau thuộc tập A.

Chú ý : Đối với câu 2) ta có thể giải cách khác : Tìm số các số lẻ gồm 5 chữ số khác nhau thuộc tập A rồi lấy 2160 trừ đi số các số lẻ này thì được số các số chẵn.

Ví dụ 9 : Dầu năm học, một lớp 12 họp bầu chọn ban đại diện lớp. Có 8 bạn được cử ra để bầu chọn một lớp trưởng, một số lớp phó học tập và một lớp phó sinh hoạt. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn giải

Ta có 8 bạn được chọn vào 3 vị trí khác nhau là lớp trưởng, lớp phó học tập và lớp phó sinh hoạt. Vậy có tất cả A_8^3 cách chọn khác nhau, tức là : $A_8^3 = 8.7.6 = 336$ cách chọn.

Ví dụ 10 : Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 18 ? Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ thoả mãn điều kiện đó ?

Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số tự nhiên gồm 6 chữ số $a_i \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $2 \le i \le 6$; $a_1 \in A \setminus \{0\}$.

Nếu tổng các chữ số khác nhau bằng 18 thì có ba cách chọn :

$$18 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 8, \quad (1)$$

$$18 = 0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7, \quad (2)$$

$$18 = 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6 \quad (3)$$

Ứng với mỗi cách chọn đó, có 5 cách chọn $a_1\ (a_1 \ne 0)$.

Ứng với mỗi cách chọn a_1 ở các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ta có một hoán vị của 5 số.

Vậy tất cả có : 3.5.5! = 15.120 = 1800 số gồm 6 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 18.

b) Nếu x là một số tự nhiên lẻ thì a_6 phải là một số lẻ.

Ứng với trường hợp (1), có hai cách chọn $a_6\ (a_6 = 1, a_6 = 3)$. Ứng với mỗi cách chọn a_6 có 4 cách chọn $a_1\ (a_1 \ne 0, a_1 \ne a_3)$ còn ở các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 là một hoán vị của 4 chữ số còn lại. Do đó ứng với trường hợp (1) ta có : 2.4.4! = 192 số.

Tương tự, ứng với trường hợp (2) có 4 cách chọn a_6, $(a_6 \in \{1, 3, 5, 7\})$, do đó ứng với trường hợp (2) ta có : 4.4.4! = 384 số

Ứng với trường hợp (3) ta có 2 cách chọn $a_6 (a_6 \in \{1, 5\})$ nên có tất cả 192 số như ở trường hợp (1).

Tóm lại, ta có tất cả : 192 + 384 + 192 = 768 số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau và có tổng các chữ số bằng 18.

4. Tổ hợp

Ví dụ 11 : Một đội xây dựng gồm 10 công nhân và 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập lập tổ công tác ?

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Để lập tổ công tác, có 3 giai đoạn.

Giai đoạn thứ nhất chọn tổ trưởng : có 3 cách chọn 1 kĩ sư làm tổ trưởng.

Giai đoạn thứ hai chọn tổ phó : có 10 cách chọn 1 công nhân làm tổ phó.

Giai đoạn thứ ba chọn 5 tổ viên trong 9 công nhân còn lại : có C_9^5 cách chọn (tổ hợp chập 5 của 9).

Vậy theo quy tắc nhân ta có tất cả :

$$3.10.C_9^5 = 30.\frac{9!}{5!4!} = 3780$$

cách thành lập tổ công tác khác nhau.

Ví dụ 12 : Có 9 cuốn sách khác nhau được đem tặng cho 3 em học sinh : A được 4 cuốn, B được 3 cuốn và C được 2 cuốn. Hỏi có bao nhiêu phương án tặng khác nhau ?

Hướng dẫn giải

Học sinh A được 4 trong 9 cuốn sách, tức là một tổ hợp chập 4 của 9 phần tử. Vậy số cách chọn để tặng cho học sinh A là C_9^4..

Sau khi đã tặng sách cho học sinh A thì học sinh B được 3 trong 5 cuốn sách còn lại, do đó số cách chọn để tặng sách cho học sinh B là C_5^3..

Sau khi đã tặng sách cho hai học sinh A và B thì học sinh C được 2 cuốn sách còn lại : số cách chọn là $1 = C_2^2$.

Vậy số phương án chọn tặng sách khác nhau là :

$$C_9^4.C_5^3.C_2^2 = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260.$$

Ví dụ 13 : Có 12 chiếc bánh ngọt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng vào 6 chiếc hộp giống nhau, mỗi hộp có hai chiếc bánh.

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Bài này chỉ khác bài trong Ví dụ 12 ở chỗ : trong bài trước 3 học sinh khác nhau, còn ở đây 6 chiếc hộp giống nhau.

Trước hết giả sử 6 chiếc hộp khác nhau. Số cách xếp 2 bánh vào hộp thứ nhất là số tổ hợp chập 2 của 12 tức là C_{12}^2.

Sau khi đã xếp 2 bánh vào hộp thứ nhất ta có C_{10}^2 cách xếp 2 bánh trong 10 bánh còn lại vào hộp thứ hai, ... cho đến cuối cùng là C_2^2 cách xếp 2 chiếc bánh cuối cùng vào hộp thứ 6.

Vậy nếu 6 hộp khác nhau thì số cách xếp vào 6 hộp là :

$$C_{12}^2.C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2 = \frac{12!}{2!10!}.\frac{10!}{2!8!}.\frac{8!}{2!6!}.\frac{6!}{2!4!}.\frac{4!}{2!2!}.1$$

$$= \frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}$$

Tuy nhiên vì 6 chiếc hộp giống nhau, nên đối với 6! cách xếp các hộp khác nhau ở trên, cuối cùng chỉ ứng với 1 cách xếp 6 hộp giống nhau. Do đó kết quả tính được ở trên phải chia cho 6!.

Tóm lại số cách xếp vào 6 hộp giống nhau là :

$$\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!6!} = \frac{12.11.10.9.8.7}{8.8} = 3.5.7.9.11 = 10395.$$

Ví dụ 14 : Trên một kệ sách có 4 loại sách lớp 12 : Văn, Sử, Lí, Hoá, mỗi loại có ít nhất 8 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để chọn 8 cuốn sách từ kệ đó ?

Hướng dẫn giải

Việc chọn này hoàn toàn xác định bởi số sách mỗi loại được chọn. Chẳng hạn, nếu chọn 3 cuốn Văn, 2 cuốn Sử, 2 cuốn Lí và 1 cuốn Hoá thì ta biểu diễn dưới dạng :

Văn	Sử	Lí	Hoá
xxx	xx	xx	x

Sau đây là một cách chọn khác :

Văn	Sử	Lí	Hoá
	xx	xxxx	xx

nghĩa là không lấy sách Văn, chọn 2 cuốn Sử, 4 cuốn Lí và 2 cuốn Hoá.

Nếu coi một cách chọn là một dãy gồm 8 dấu x và 3 dấu |, thì bài toán của chúng ta là đếm số các dãy khác nhau gồm 8 dấu x và 3 dấu | đó. Các dãy này khác nhau ở vị trí của 3 dấu | trong dãy gồm 11 dấu x và |.

Do đó số các dãy khác nhau chính là số tổ hợp chập 3 của 11 phần tử, tức là C_{11}^3. Vậy ta có :

$$C_{11}^3 = \frac{11.10.9}{3.2} = 165$$

cách chọn khác nhau.

D. LUYỆN TẬP

4.1 Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau lập được từ các số 1, 2, 3, 4, 5, nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) Trong số đó các chữ số 1, 3, 5 đứng liền nhau theo thứ tự đó.

b) Trong số đó các chữ số 1, 3, 5 đứng liền nhau theo bất kì thứ tự nào.

c) Trong số đó chữ số 1 luôn đứng trước chữ số 4 (chẳng hạn 21345 hay 32154).

d) Trong số đó chữ số 1 đứng trước chữ số 3 và chữ số 3 đứng trước chữ số 5.

4.2 Một đội thanh niên xung phong gồm có 10 nam và 12 nữ. Cần thành lập một tổ công tác có 5 người.

a) Có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác với điều kiện tổ phải có ít nhất 1 nữ ?

b) Có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác với điều kiện trong tổ có nhiều nhất là 1 nam ?

4.3 Ta xét những dãy gồm 8 số $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ (*), trong đó $a_i (1 \le i \le 8)$ là số chữ số 0 hoặc chữ số 1.

a) Có bao nhiêu dãy (*) trong đó có đúng ba chữ số 0 ?

b) Có bao nhiêu dãy (*) trong đó có ba chữ số 0 đứng liền nhau, còn lại là 5 chữ số 1 ?

c) Có bao nhiêu dãy (*) trong đó chứa ít nhất hai chữ số 0 đứng liền nhau ?

4.4 Có 40 quả táo, trong đó có 5 quả bị sâu.

a) Có bao nhiêu cách chọn 5 quả táo không bị sâu ?

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 quả táo trong đó có ít nhất một quả táo bị sâu ?

4.5 Có ba hộp, trong mỗi hộp chứa ít nhất 8 viên bi. Hộp thứ nhất chứa bi đỏ, hộp thứ hai chứa bi vàng và hộp thứ ba chứa bi xanh.

a) Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn ra 8 viên bi ?

b) Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn ra 8 viên bi, trong đó mỗi màu có ít nhất 1 viên bi ?

4.6 Xét những dãy (*) như trong bài 4.3. Tìm số các dãy đó chỉ chứa đúng hai lần dãy con 10 (tức là $a_i = 1$, $a_{i+1} = 0$)

4.7 Cho phương trình : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ (1)

a) Phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là những số nguyên không âm ?

b) Phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm nguyên thoả mãn điều kiện $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 2$, $x_4 \geq 0$.

4.8 Một hộp bi gồm ba loại : bi đỏ, bi trắng và bi xanh, mỗi loại có ít nhất 10 viên. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để chọn được 10 viên bi từ hộp bi đó ?

Chương 5.

XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Không gian mẫu :

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra trong một phép thử ngẫu nhiên gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

2. Biến cố :

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một *biến cố*.

– *Biến cố sơ cấp* là tập con gồm đúng một phần tử của không gian mẫu.

– *Biến cố xung khắc* : Hai biến cố A và b được gọi là xung khắc nếu $A \cap B = \varnothing$.

– Các biến cố sơ cấp của không gian mẫu gọi là *đồng khả năng* nếu khả năng xuất hiện của chúng không đồng đều như nhau.

3. Xác suất của một biến cố :

Cho không gian mẫu E gồm n biến cố sơ cấp đồng khả năng và một biến cố A có p biến cố sơ cấp ($0 \le p \le n$). Xác suất của biến cố A kí hiệu là P(A) là số :

$$P(A) = \frac{p}{n} = \frac{\text{số phần tử của A}}{\text{số phần tử của E}}.$$

4. Các tính chất của xác suất :

Cho không gian mẫu E và các biến cố A, B. Ta có :

a) $0 \le P(A) \le 1$;

b) $P(\varnothing) = 0$, $P(E) = 1$;

c) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

d) Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

e) Nếu A và A' là hai biến cố bù nhau, tức là $A' = E \setminus A$ thì :

$$P(A') = 1 - P(A).$$

5. Xác suất có điều kiện :

Trong không gian mẫu E cho hai biến cố A và B, với $P(A) > 0$. *Xác suất có điều kiện* của B khi A đã xảy ra, là số kí hiệu bởi $P(B/A)$, cho bởi công thức :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Từ định nghĩa đó ta có :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

gọi là *công thức nhân xác suất.*

Nếu P(B/A) = P(B) thì ta nói biến cố B *độc lập* với A. Lúc đó ta có :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải các bài toán xác suất, ta cần làm theo các bước sau :

1. Trước hết cần tìm số phần tử của không gian mẫu.

2. Sau đó tìm số phần tử của biến cố A nêu ra trong đề. Nếu tìm được số phần tử của biến cố thì xác suất P(A) của biến cố A là :

$$PA = \frac{\text{số phần tử của biến cố A}}{\text{số phần tử của không gian mẫu}}$$

3. Nếu việc tìm trực tiếp số phần tử của biến cố A gặp khó khăn, thì ta tìm số phần tử của biến cố bù A' của A, từ đó tìm được $P(A')$ và áp dụng công thức :

$$P(A) = 1 - P(A').$$

4. Trong trường hợp có hai hay nhiều biến cố, ta cần xét xem đó có phải là các biến cố độc lập không, hoặc có phải là biến cố xung khắc không, để áp dụng các công thức thích hợp.

C. VÍ DỤ ÁP DỤNG

1. Trường hợp có một biến cố

Ví dụ 1 : Tung hai con xúc xắc đồng chất.

1) Tìm xác suất của biến cố "có tổng số chấm là 8".

2) Tìm xác suất của biến cố "có tổng số chấm là số lẻ hoặc chia hết cho 3".

(Trích đề thi Đại học Đà Nẵng, khối A, năm 1997)

Hướng dẫn giải

1) Vì mỗi con xúc xắc có 6 mặt với số chấm thuộc tập M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} nên khi tung hai xúc xắc thì không gian mẫu gồm các cặp số (x, y) với x, y ∈ M. Tập các cặp số (x, y) có thứ tự với x, y ∈ M có số phần tử là $6^2 = 36$. Tuy nhiên vì hai con xúc xắc đồng chất nên cặp (x, y) và cặp (y, x) không phân biệt. Vì vậy không gian mẫu gồm các cặp sau : (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6).

Như vậy không gian mẫu gồm 21 phần tử.

Biến cố "có tổng số chấm là 8" gồm ba phần tử :

(2, 6), (3, 5), (4, 4)

Vậy xác suất của biến cố này là $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2) Các cặp số tổng số chấm lẻ gồm :

– Tổng số chấm là 3 : (1, 2).

– Tổng số chấm là 5 : (1, 4), 2, 3).

– Tổng số chấm là 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4).

– Tổng số chấm là 9 : (3, 6), (4, 5).

– Tổng số chấm là 11 : (5, 6).

Tất cả có 9 phần tử.

Trong 9 phần tử này những cặp có tổng số chấm là 3 hay 9 thì chia hết cho 3. Ngoài ra có những cặp mà tổng số chấm là 6 cũng chia hết cho 3 đó là (1, 5), (2, 4), (3, 3).

Vậy biến cố "có tổng số chấm là số lẻ hoặc chia hết cho 3" có số phần tử là 9 + 3 = 12 phần tử. Do đó xác suất của biến cố này là $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ví dụ 2 : Một nhóm bạn có 6 người. Hỏi xác suất để có ít nhất hai người có cùng ngày sinh là bao nhiêu ?

Hướng dẫn giải

Vì một năm có 365 ngày (không tính năm nhuận), ngày sinh của mỗi người là một ngày tuỳ ý trong 365 ngày đó, nên không gian mẫu có 365^6 phần tử, mỗi phần tử là một bộ 6 ngày sinh :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)\ (*)$$

Kí hiệu B là biến cố "có ít nhất hai người có cùng ngày sinh". Như vậy B gồm những bộ (*) ở trên mà có ít nhất một cặp $i \neq j$ để $a_i = a_j$ $(1 \leq i, j \leq 6)$.

Việc tìm số phần tử của B tương đối khó, vì ta phải xét các trường hợp : số bộ (*) có 2 thành phần trùng nhau, số bộ (*) có 3 thành phần trùng nhau v.v.t. Vì vậy ta xét biến cố B' bù của B : "không có hai người nào có cùng ngày sinh". Mỗi phần tử của B' là một bộ (*) trong đó $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$, nghĩa là đây là một chỉnh hợp chập 6 của 365. Do đó số phần tử của B' là A_{365}^6.

Vậy xác suất của biến cố B' là

$$\frac{A_{365}^6}{365^6} = \frac{365.364.363.362.361.360}{365^6}$$

Từ đó suy ra xác suất của biến cố B là :

$$P(B) = 1 - P(B') = \frac{365^6 - 364.363.362.361.360}{365^6} \approx 0{,}041.$$

Ví dụ 3 : Gieo một đồng xu 6 lần. Tính xác suất để số lần xuất hiện mặt sấp nhiều hơn số lần xuất hiện mặt ngửa.

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu gồm các dãy kết quả của 6 lần gieo, chẳng hạn dãy (S, N, S, S, N, N), trong đó S kí hiệu sấp, N kí hiệu ngửa.

Vì mỗi lần gieo có hai kết quả S hoặc N nên không gian mẫu gồm $2^6 = 64$ phần tử.

Biến cố số lần xuất hiện mặt sấp nhiều hơn số lần xuất hiện mặt ngửa bao gồm 3 trường hợp :

1) Xuất hiện 4 mặt sấp : Số lần xuất hiện 4 mặt sấp là C_6^4.

2) Xuất hiện 5 mặt sấp, tất cả có C_6^5 lần.

3) Xuất hiện 6 mặt sấp, tất cả có C_6^6 lần.

Vậy số phần tử của biến cố "số lần xuất hiện mặt sấp nhiều hơn số lần xuất hiện mặt ngửa" là

$$C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = \frac{6.5}{2} + 6 + 1 = 22.$$

Do đó xác suất phải tìm là $\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$.

Ví dụ 4 : Một lô hàng có 30 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm, được chia ngẫu nhiên thành 3 phần bằng nhau, mỗi phần 10 sản phẩm.

1) Tìm xác suất để có ít nhất một phần có đúng một phế phẩm.

2) Tìm xác suất để mỗi phần đều có một phế phẩm.

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật Quân sự, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Để tìm số phần tử của không gian mẫu, ta lưu ý đến cách chia lô hàng thành 3 phần :

Phần đầu là tập con gồm 10 sản phẩm trong 30 sản phẩm, do đó số cách chọn phần đầu là C_{30}^{10} (tổ hợp chập 10 của 30 phần tử).

Sau khi đã chọn phần đầu thì còn 20 sản phẩm và ta lại chọn 10 sản phẩm trong đó cho phần thứ hai, số cách chọn phần thứ hai là C_{20}^{10}.

Sau khi đã chọn hai phần thì còn một cách chọn 10 sản phẩm còn lại cho phần thứ ba.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $C_{30}^{10}.C_{20}^{10}$.

1) Bây giờ ta xét biến cố "có ít nhất một phần có đúng một phế phẩm". Gọi biến cố này là A. Vì việc tính số phần tử của A phức tạp, ta xét biến cố bù A' : "Không có phần nào có đúng một phế phẩm". Biến cố A' chính là biến cố "một phần có 3 phế phẩm, hai phần còn lại không có phế phẩm", hay "có hai phần gồm toàn chính phẩm" vì lúc đó phần thứ ba sẽ mặc nhiên có 3 phế phẩm.

Vì số chính phẩm của lô hàng là 27, nên số cách chọn một phần gồm 10 chính phẩm là C_{27}^{10}. Sau khi chọn phần này thì còn lại 17 chính phẩm, nên số cách chọn phần thứ hai gồm 10 chính phẩm là C_{27}^{10}.

Vậy số phần tử của biến cố A' là $C_{27}^{10}.C_{17}^{10}$. Do đó :

$$P(A')=\frac{C_{27}^{10}.C_{17}^{10}}{C_{30}^{10}.C_{20}^{10}}=\frac{\frac{27!}{10!17!}.\frac{17!}{10!7!}}{\frac{30!}{10!20!}.\frac{20!}{10!10!}}=\frac{27!10!}{30!7!}=\frac{6}{203}.$$

Như vậy : $P(A)=1-P(A')=1-\frac{6}{203}=\frac{197}{203}$.

2) Nếu mỗi phần có 1 phế phẩm thì có 9 chính phẩm. Ta phải chọn 1 phế phẩm trong 3 phế phẩm và chọn 9 chính phẩm trong 27 chính phẩm cho phần đầu tiên. Số cách chọn này là $C_3^1.C_{27}^9$.

Sau khi chọn phần đầu ta còn lại 2 phế phẩm và 18 chính phẩm, nên số cách chọn 1 phế phẩm và 9 chính phẩm cho phần thứ hai là $C_2^1.C_{18}^9$.

Sau khi đã chọn 2 phần thì chỉ còn 1 cách chọn cho phần thứ ba. Vậy số phần tử của biến cố "mỗi phần có 1 phế phẩm" là $C_3^1.C_{27}^9.C_2^1.C_{18}^9$

Vậy xác suất của biến cố này là :

$$\frac{C_3^1.C_{27}^9.C_2^1.C_{18}^9}{C_{30}^{10}.C_{20}^{10}} = \frac{3.\dfrac{27!}{9!\,18!}.2.\dfrac{18!}{9!\,9!}}{\dfrac{30!}{10!\,20!}.\dfrac{20!}{10!\,10!}} = \frac{6.27!(10)^3}{30!} = \frac{50}{203}.$$

2. Trường hợp có nhiều biến cố

Ví dụ 5 : Một đội đặc nhiệm dùng 2 con chó nghiệp vụ để kiểm tra ma tuý một xe ôtô chở ma tuý lậu. Xác suất để con chó thứ nhất phát hiện ra ma tuý là 0,9 ; còn con chó thứ hai là 0,7. Cả hai con độc lập kiểm tra xe ôtô. Tính xác suất của biến cố sau :

1) Ma tuý bị phát hiện bởi đúng 1 con chó.

2) Ma tuý không bị phát hiện.

Hướng dẫn giải

Gọi C_1 là biến cố ma tuý bị con chó thứ nhất phát hiện, C_2 là biến cố ma tuý bị con chó thứ hai phát hiện, A là biến cố ma tuý bị phát hiện bởi đúng 1 con chó và B là biến cố ma tuý không bị phát hiện.

1) Biến cố A xảy ra khi C_1 xảy ra và C_2 không xảy ra, hoặc C_1 không xảy ra và C_2 xảy ra, nghĩa là :

$$A = (C_1 \cap C_2') \cup (C_1' \cap C_2)$$

Vì $C_1 \cap C_2'$ và $C_1' \cap C_2$ là hai biến cố xung khắc nên

$$P(A) = P(C_1 \cap C_2') + P(C_1' \cap C_2).$$

Mặt khác, C_1 và C_2' là hai biến cố độc lập, C_1' và C_2 cũng là hai biến cố độc lập nên ta có :

$$P(A) = P(C_1).P(C_2') + P(C_1').P(C_2) = 0{,}9.0{,}3 + 0{,}1.0{,}7$$
$$= 0{,}27 + 0{,}07 = 0{,}34.$$

2) Biến cố B xảy ra khi C_1 và C_2 đều không xảy ra, tức là :

$$B = C_1' \cap C_2' \Rightarrow P(B) = P(C_1').P(C_2') = 0,1.0,3 = 0,03.$$

Ví dụ 6 : Có hai hộp bi, mỗi hộp có 2 viên bi đỏ và 8 viên bi trắng. Các viên bi chỉ khác nhau về màu. Cho hai người, mỗi người lấy một hộp bi, và từ hộp của mình mỗi người lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để hai người lấy được số bi đỏ như nhau.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội 2, khối A, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi A_1 là biến cố : "người thứ nhất lấy 1 viên bi đỏ và 2 viên bi trắng"

Gọi A_2 là biến cố : "người thứ nhất lấy 2 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng".

Gọi A_3 là biến cố : "người thứ nhất lấy 3 viên bi trắng".

Tương tự, kí hiệu B_1 là biến cố "người thứ hai lấy 1 viên bi đỏ, hai viên bi trắng", B_2 là biến cố "người thứ hai lấy 2 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng", B_3 là biến cố "người thứ hai lấy 3 viên bi trắng".

Ta có : $P(A_1) = P(B_1) = \dfrac{C_2^1.C_8^2}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$; $P(A_2) = P(B_2) = \dfrac{C_2^2.C_8^1}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{15}$;

$$P(A_3) = P(B_3) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

Gọi C là biến cố "hai người lấy được số bi đỏ như nhau", thì ta thấy hoặc hai người cùng lấy được 1 viên bi đỏ, hoặc cùng lấy được 2 viên bi đỏ, hoặc không lấy được viên bi đỏ nào. Do đó :

$$C = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_3)$$

Vì $A_1 \cap B_1$, $A_2 \cap B_2$, $A_3 \cap B_3$ là các biến cố xung khắc, nên :

$$P(C) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) + P(A_3 \cap B_3).$$

Ngoài ra A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ là các biến cố độc lập nên :

$$P(C) = P(A_1).P(B_1) + P(A_2).P(B_2) + P(A_3).P(B_3)$$

$$= \frac{7^2}{15^2} + \frac{1^2}{15^2} + \frac{7^2}{15^2} = \frac{99}{225} = \frac{11}{25}.$$

Vậy xác suất để hai người lấy được số bi đỏ như nhau là $\dfrac{11}{25}$.

Ví dụ 7 : Cho hai hộp đựng các viên bi chỉ khác nhau về màu. Hộp thứ nhất đựng 19 viên bi trong đó có 4 viên bi trắng và 15 viên bi đen. Hộp thứ hai đựng 14 viên bi trong đó có 5 viên bi trắng và 9 viên bi đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để trong 2 viên bi đã lấy ra có 1 viên bi trắng và 1 viên bi đen.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Quy Nhơn, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi A_i là biến cố "lấy được viên bi trắng từ hộp thứ i", i = 1, 2..

Gọi B_i là biến cố "lấy được viên bi đen từ hộp thứ i", i = 1, 2.

Gọi C là biến cố "trong hai viên bi lấy ra từ hai hộp có 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen".

Ta có : $C = (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)$.

Vì $A_1 \cap B_2$ và $A_2 \cap B_1$ là các biến cố xung khắc nên :

$$P(C) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)$$

Mặt khác, A_1 và B_2 là hai biến cố độc lập, A_2 và B_1 cũng vậy, nên :

$$P(C) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1)$$

Ta có : $P(A_1) = \frac{4}{19}$, $P(A_2) = \frac{5}{14}$; $P(B_1) = \frac{15}{19}$, $P(B_2) = \frac{9}{14}$.

Do đó : $P(C) = \frac{4}{49}.\frac{9}{14} + \frac{5}{14}.\frac{15}{19} = \frac{36+75}{266} = \frac{111}{266}$.

3. Xác suất có điều kiện

Ví dụ 8 : Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ loại I là 0,9, của xạ thủ loại II là 0,8. Lấy ngẫu nhiên ra 1 xạ thủ và xạ thủ đó bắn 1 viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

(Trích đề thi Đại học Đà Nẵng, khối A, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi B_1 là biến cố "khi chọn được xạ thủ loại I", B_2 là biến cố "khi chọn được xạ thủ loại II".

Gọi A là biến cố "viên đạn bắn trúng đích".

Biến cố A xảy ra sau khi biến cố B_1 hoặc B_2 đã xảy ra, do đó ta có :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)$$

Mặt khác : $P(B_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P(B_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$,

$P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}8$.

Vì vậy : $P(A) = \frac{0{,}9}{5} + \frac{4}{5}.0{,}8 = 0{,}82.$

Vậy xác suất để viên đạn trúng đích là 0,82.

Ví dụ 9 : Có hai hộp đựng bút chì, các bút chì chỉ khác nhau về màu. Hộp thứ nhất có 20 bút chì, trong đó có 18 bút chì đỏ, 2 bút chì đen. Hộp thứ hai có 30 bút chì, trong đó có 27 bút chì đỏ và 3 bút chì đen. Từ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên một bút chì bỏ vào hộp thứ hai. Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên từ hộp thứ hai một bút chì được bút chì đỏ.

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố "lấy được bút chì đỏ từ hộp thứ hai"

Gọi B_1 là biến cố "bút chì lấy từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai là bút chì đỏ", B_2 là biến cố "bút chì lấy từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai là bút chì đen".

Xác suất để bút chì bỏ từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai là bút chì đỏ là : $P(B_1) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

Xác suất của biến cố B_2 là : $P(B_2) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Xác suất có điều kiện để từ hộp thứ hai lấy ra được bút chì đỏ khi các biến cố B_1 hoặc B_2 đã xảy ra là :

$$P(A/B_1) = \frac{28}{31}, P(A/B_2) = \frac{27}{31}$$

Vậy ta có :

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{9}{10}.\frac{28}{31} + \frac{1}{10}.\frac{27}{31} = 0{,}9.$$

Ví dụ 10 : Cho 3 hộp giống nhau mỗi hộp đựng 7 bút chì khác nhau về màu sắc.

Hộp thứ nhất có 3 bút màu đỏ, 2 bút màu xanh, 2 bút màu đen.

Hộp thứ hai có 2 bút màu đỏ, 2 bút màu xanh, 3 bút màu đen.

Hộp thứ ba có 5 bút màu đỏ, 1 bút màu xanh, 1 bút màu đen.

Lấy ngẫu nhiên 1 hộp và rút hú hoạ từ hộp đó ra 2 bút.

1) Tìm xác suất để hai bút đó có cùng màu xanh.

2) Tìm xác suất để hai bút đó không có màu đen.

(Trích đề thi Đại học Xây dựng Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi A_1 là biến cố "bút lấy ra từ hộp thứ nhất", A_2 là biến cố "bút lấy ra từ hộp thứ hai", A_3 là biến cố "bút lấy ra từ hộp thứ ba".

Vì theo giả thiết 3 hộp giống nhau nên các biến cố A_1, A_2, A_3 là đồng khả năng, do đó :

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

1) Gọi B là biến cố "hai bút lấy ra cùng màu xanh". Xác suất có điều kiện của biến cố B khi các biến cố A_1, A_2, A_3 xảy ra bằng :

$$P(B/A_1) = \frac{C_2^2}{C_2^7} = \frac{1}{27},\ P(B/A_2) = \frac{C_2^2}{C_2^7} = \frac{1}{21}$$

Vì hộp thứ ba chỉ có 1 bút màu xanh nên không thể rút ra 2 bút có màu xanh, nên : $P(B/A_3) = 0.$

Do đó ta có :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{21} + \frac{1}{3}.\frac{1}{21} = \frac{2}{63}.$$

2) Gọi C là biến cố "hai bút lấy ra không có màu đen". Biến cố C là hợp của ba biến cố :

– Biến cố B : "hai bút lấy ra có cùng màu xanh" đã xét ở trên.

– Biến cố D : "hai bút lấy ra có cùng màu đỏ".

– Biến cố E : "hai bút lấy ra có 1 bút đỏ, 1 bút xanh".

Vì đây là 3 biến cố xung khắc nên ta có :

$$P(C) = P(B) + P(D) + P(E).$$

Ở trên ta đã tính được $P(B) = \frac{2}{63}$. Ta tính P(D), P(E).

$$P(D/A_1)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7},\ P(D/A_2)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21},$$

$$P(D/A_3)=\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}.$$

Do đó :

$$P(D)=P(A_1)P(D/A_1)+P(A_2)P(D/A_2)+P(A_3)P(D/A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)=\frac{1}{3}.\frac{14}{27}=\frac{2}{9}.$$

Tương tự, $P(E/A_1)=\frac{C_3^1.C_2^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$, $\quad P(E/A_2)=\frac{C_2^1.C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$,

$$P(E/A_3)=\frac{C_5^1.C_1^1}{C_7^2}=\frac{5}{21}.$$

$$P(E)=P(A_1)P(E/A_1)+P(A_2)P(E/A_2)+P(A_3)P(E/A_3)$$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}\right)=\frac{1}{3}.\frac{15}{21}=\frac{5}{21}$. Như vậy : $P(C)=\frac{2}{63}+\frac{2}{9}+\frac{5}{21}=\frac{31}{63}$.

Vậy xác suất để hai bút lấy ra không có màu đen là $\frac{31}{63}$.

D. LUYỆN TẬP

5.1 Trong một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh (các viên bi chỉ khác nhau về màu sắc). Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có đúng hai viên bi màu đỏ.

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân, năm 1999)

5.2 Một người bán trái cây có một sọt cam gồm 50 trái, trong đó có 30 trái ngọt. Tìm xác suất để người bán lấy ra một tá (12 trái) trong đó có nhiều nhất 2 trái không ngọt.

5.3 Kì xổ số cuối năm có tất cả 5 xêri đánh số theo các chữ A, B, C, D, E. Mỗi xêri có 100 ngàn vé, kí hiệu bằng 5 chữ số. Cả 5 xêri chỉ có một vé độc đắc. Lúc quay vé độc đắc, cả chữ và số đều chọn ngẫu nhiên, độc lập với nhau. Tính xác suất để bạn mua 1 vé và trúng số độc đắc.

5.4 Một hộp bóng đèn có 10 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bóng. Tính xác suất để lấy được :

1) Cả 3 bóng đều tốt.

2) Có ít nhất 1 bóng tốt.

(Trích đề thi Học viện Chính trị Quốc gia HCM, năm 1999)

5.5 Công ti sữa Việt Nam phát 100 phiếu thăm dò khách hàng với 2 câu hỏi : "Tháng vừa rồi bạn có xem quảng cáo về VinaMilk không ?" và "Tháng vừa rồi bạn có mua sản phẩm của VinaMilk không ?". Kết quả thăm dò cho trong bảng sau :

	Mua	Không mua	Tổng số
Có xem quảng cáo	15	25	40
Không xem quảng cáo	10	50	60
Tổng số	25	75	100

Gọi A là biến cố "Có mua sản phẩm VinaMilk" ; B là biến cố "Có xem quảng cáo về VinaMilk". Tìm các xác suất sau :

1) $P(A)$;

2) $P(A \cap B)$;

3) $P(A/B)$ và $P(A'/B)$, (A' là biến cố không mua sản phẩm).

5.6 Có hai vận động viên bắn súng cùng bắn vào một bia. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng là 0,8 còn người thứ hai là 0,7. Tính xác suất để :

1) Bia trúng đạn ;

2) Bia trúng hai viện đạn ;

3) Bia không trúng đạn.

5.7 Trong một hộp có 15 viên bi, trong đó có 10 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, các viên bi chỉ khác màu. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để :

1) Lấy được ít nhất 1 viên bi đỏ ;

2) Lấy được 1 hoặc 2 viên bi xanh.

5.8 Một hộp có 3 loại bi : bi đỏ, bi trắng và bi xanh, mỗi loại có ít nhất 8 viên bi. Lấy ngẫy nhiên 8 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong các viên bi lấy ra không có viên bi đỏ nào.

Phần III.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. 1. Tính các tích phân sau :

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$;   b) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$;   c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x.\cos x}$.

2. Tính các giới hạn :

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$;   b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$

3. Tìm a để đạo hàm bậc nhất $y'(x)$ của hàm số :

$$y(x) = \begin{cases} e^x & \text{với } x \geq 0 \\ x^2 + ax + 1 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

tồn tại tại x = 0.

4. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{1+x^{10}}}dx < \frac{1}{26}.$$

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật Mật mã, năm 1999)

Bài 2. Tính các tích phân sau :

1. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin x}}dx$;   2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$;

3. $K = \int_0^{\pi} x\cos^4 x \sin^3 x dx$.

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, năm 1999)

Bài 3. 1. Tính : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1}$;

2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số :

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{3\sin 4x - \sin 6x - 3\sin 2x}.$$

3. Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu Cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dự Đại hội Cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội 2, năm 1999)

Bài 4. 1. Cho f(x) là hàm số thực, xác định và liên tục trên đoạn $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, có $f(0) > 0$ và

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < 1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Giải bất phương trình :

$$\int_{\ln x}^{2+\ln x} \frac{dt}{2\sqrt{t}} < \int_{e^{3/4}}^{x} \frac{dt}{t}.$$

(Trích đề thi Đại học Mỏ – Địa chất, năm 1999)

Bài 5. 1. Cho hàm số f xác định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f liên tục trên tập số thực **R**.

b) Hàm số f có đạo hàm tại những điểm nào ? Tính đạo hàm của f tại các điểm đó.

2. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường : $x = 1,\ x = e,\ y = 0,\ y = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

3. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả ba màu.

(Trích đề thi Đại học Huế, Khối Kiến trúc, năm 1999)

Bài 6. 1. Tính các tích phân : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$; $J = \int_1^2 \dfrac{dx}{x\left(x^5+1\right)}$.

2. Tính diện tích hình giới hạn bởi các đường

$$y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \text{ và } y = |x|.$$

3. Chứng minh rằng với k, n là các số tự nhiên và $3 \le k \le n$ ta luôn có :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

(Trích đề thi Đại học Thuỷ Lợi, năm 1999)

Bài 7. 1. Cho hàm số : $g(x) = \sin x \sin 2x \cos 5x$.

a) Tìm họ nguyên hàm của hàm số g(x).

b) Tính tích phân : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{e^x + 1}dx.$

2. Tìm 2 số A, B để hàm số $h(x) = \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2}$ có thể biểu diễn được dưới dạng :

$$h(x) = \frac{A\cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{B\cos x}{2 + \sin x},$$

từ đó tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(x)dx.$

3. Tính tổng : $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n.$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1999)

Bài 8. 1. Cho hàm hàm số f liên tục trên khoảng (0 ; 1). Chứng minh :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

2. Sử dụng kết quả trên để tính :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x}\ ;\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\sin x + \cos x}.$$

3. Trong một phòng có 2 bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi, nếu :

a) Các học sinh ngồi tuỳ ý.

b) Các học sinh nam ngồi 1 bàn và các học sinh nữ ngồi 1 bàn.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1999)

Bài 9. 1. Tính các tích phân sau :

$$I = \int_{1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \; ; \; J = \int_{0}^{1} \sqrt{x^2+1}\,dx.$$

2. Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

3. Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm từ tổ sinh viên đó ?

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1999)

Bài 10. 1. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx.$

2. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

3. Kí hiệu C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n)$. Chứng minh :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}, \; (0 < k < n).$$

4. Có 10 chữ cái khác nhau.

a) Có thể thành lập được bao nhiêu chữ có 5 chữ có 5 chữ cái ?

b) Có thể thành lập được bao nhiêu chữ có 5 chữ cái khác nhau ?

(Trích đề thi Đại học Đà Lạt, năm 1999)

Bài 11. 1. Cho 2 số nguyên dương p và q. Tính

$$I = \int_{0}^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx$$

trong hai trường hợp : $p = q$ và $p \ne q$.

2. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Giả sử :

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx = 0, \; \forall x \in [0\; ;\; 2\pi].$$

Hãy sử dụng kết quả của câu 1 để tính $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

3. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Có bao nhiêu tập con X của tập A thoả mãn điều kiện X chứa 1 và không chứa 2 ?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123 ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp.HCM, năm 1999)

Bài 12. 1. Tính diện tích của miền kín giới hạn bởi đường cong (C) : $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục Ox và đường thẳng x = 1.

2. Cho (H) là miền kín giới hạn bởi đường cong (L) : $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$, trục Ox và đường thẳng x = 1. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo ra khi cho (H) quay quanh trục Ox.

3. Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có năm chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu :

a) Năm chữ số 1 được xếp kề bên nhau.

b) Các chữ số được xếp tuỳ ý.

(Trích đề thi Phân viện Học viện Ngân hàng Tp.HCM, năm 1999)

Bài 13. 1. Chứng minh rằng :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1 \ (\tan a > 0).$$

2. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách : toa I, toa II, toa III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó ?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên ?

(Trích đề thi Đại học Luật Hà Nội, năm 1999)

Bài 14. 1. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x\,dx$.

2. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có :

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1999)

Bài 15. 1. Tính tích phân : $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$.

2. Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối của số điện thoại cần gọi và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó khác nhau. Tính xác suất để người đó quay số một lần được đúng số điện thoại cần gọi.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Quy Nhơn, năm 1999)

Bài 16. 1. Có n học sinh nam và n học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau.

2. Chọn ngẫu nhiên một số có 3 chữ số. Tìm xác suất để số được chọn là số chẵn và các chữ số của nó đều khác nhau.

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật Quân sự, năm 1998)

Bài 17. Trong 100 vé số có 1 vé trúng thưởng 10 000 đồng, 5 vé trúng thưởng 5 000 đồng và 10 vé trúng thưởng 1 000 đồng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé. Tính xác suất các biến cố :

1. Người đó trúng thưởng 3 000 đồng.

2. Người đó trúng thưởng ít nhất 3 000 đồng.

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, năm 1998)

Bài 18. Có 9 tấm thẻ ghi các số từ 1 đến 9. Trên mỗi thẻ ghi 1 số (trên các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau).

Chọn ngẫu nhiên đồng thời của 2 thẻ. Tìm xác suất sao cho tích của hai số ghi trên thẻ đã chọn là một số chẵn.

(Trích đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

Bài 19. Một bình đựng 10 viên bi chỉ khác nhau về màu, trong đó có 7 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ.

1. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ.

2. Lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi rồi lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi nữa. Tính xác suất để được 1 viên bi xanh ở lần lấy thứ nhất và 1 viên bi đỏ ở lần lấy thứ hai.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội 2, năm 1997)

Bài 20. Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg và 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó.

1. Có bao nhiêu cách chọn như thế ?

2. Tính xác suất để tổng trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9kg.

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1998)

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. GIẢI TÍCH

CÂU HỎI

1. Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại nếu :

a) Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, b) Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, d) Cả a), b) và c) đều đúng.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ không tồn tại thì :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$ không tồn tại, b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$ tồn tại

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$ tồn tại d) Cả a), b) và c) đều không chắc đúng.

3. Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ và g(x) là hàm số bị chặn thì :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = 0$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

4. Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a ; b] thì :

a) Phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in [a ; b]$.

b) Phương trình f(x) = 0 có đúng một nghiệm $x_0 \in (a ; b)$.

c) Phương trình f(x) = 0 có đúng hai nghiệm $x_0 \in [a ; b]$.

d) Cả a), b) và c) đều sai.

5. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$

a) A = 3 b) $A = \dfrac{1}{3}$ c) $A = \dfrac{2}{3}$ d) $A = \dfrac{1}{2}$.

6. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

a) $A = 2$ b) $A = 3$ c) $A = \dfrac{2}{3}$ d) $A = \dfrac{3}{2}$.

7. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

a) $A = 3$ b) $A = 2$ c) $A = 0$ d) $A = \dfrac{2}{3}$.

8. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

a) $A = 2$ b) $A = \dfrac{1}{2}$ c) $A = \dfrac{1}{3}$ d) $A = 3$.

9. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x - 2} - 1}$

a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = \dfrac{1}{2}$ d) $A = 0$.

10. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (x tính bằng radian)

a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = 0$ d) $A = \dfrac{3}{5}$.

11. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

a) $A = 2$ b) $A = 1$ c) $A = \dfrac{1}{3}$ d) $A = 3$.

12. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}$

a) $A = \dfrac{8}{3}$ b) $A = \dfrac{2}{3}$ c) $A = 2$ d) Một đáp số khác.

13. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos nx}{x^2}$

a) $A = 0$ b) $A = n$ c) $A = \dfrac{n}{2}$ d) $A = \dfrac{n^2}{2}$.

14. Tìm $A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$

a) $A = 0$ b) $A = 2$ c) $A = \infty$ d) $A = 1$.

15. Tìm $A = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

a) $A = \frac{1}{2}$ b) $A = 2$ c) $A = 0$ d) Một đáp số khác

16. Tìm $A = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

a) $A = \infty$ b) $A = 1$ c) $A = 2$ d) $A = 0$.

17. Cho $B = x - \sqrt{x+1}$. Tìm $\lim_{x \to +\infty} B$

a) $\lim_{x \to +\infty} B = 0$ b) $\lim_{x \to +\infty} B = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} B = 1$ d) Một đáp số khác.

18. Tìm $A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)$

a) $A = 0$ b) $A = 1$ c) $A = \frac{1}{2}$ d) $A = 2$.

19. Tìm $A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}\right)$

a) $A = 0$ b) $A = +\infty$ c) $A = 2$ d) Một đáp số khác.

20. Tìm $A = \lim_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0$

a) $A = -\frac{b}{a}$ b) $A = -\frac{d}{c}$ c) $A = \frac{a}{d}$ d) $A = \frac{a}{c}$.

21. Tìm $A = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{ex^2 + fx + g}, e \neq 0$

a) $A = 0$ b) $A = 1$ c) $A = \frac{c}{g}$ d) $A = \frac{a}{e}$.

22. Tìm $A = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

a) $A = 0$ b) $A = +\infty$ c) $A = 1$ d) A không tồn tại.

23. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0}(x \ln x)$

a) $A = \infty$ b) $A = 0$ c) $A = 1$ d) Cả a), b), c) đều sai.

24. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

a) $A = 0$ b) $A = \infty$ c) $A = 1$ d) $A = 2$.

25. Cho $D = x - a\ln x$, $a \in R$. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} D$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} D = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} D = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} D = a$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} D = +\infty$.

26. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = \dfrac{1}{3}$ d) Cả a), b), c) đều sai.

27. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

a) $A = 0$ b) $A = 2$ c) $A = \dfrac{1}{2}$ d) Một đáp số khác.

28. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $A = 0$ b) $A = \dfrac{1}{3}$ c) $A = 1$ d) $A = 3$.

29. Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin^3 x}\right)$

a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = \dfrac{1}{2}$ d) Một đáp số khác.

30. Cho $A = xe^{\frac{1}{\sin x}}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 0} A$

a) $\lim\limits_{x \to 0} A = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 0} A = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0} A = 1$ d) $\lim\limits_{x \to 0} A = e$.

31. Tìm $\lim_{x\to 0}\left(x\cot\frac{x}{3}\right)$

a) A = 0 b) $A = \infty$ c) A = 3 d) A = 2.

32. Tìm $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)$

a) A = 0 b) A = −1 c) $A = -\infty$ d) $A = -\frac{1}{4}$.

33. Tìm $A = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$

a) A = e b) $A = e^{\sqrt{2}}$ c) $A = \frac{1}{2}e^2$ d) $A = e^2$.

34. Tìm $A = \lim_{x\to(-2)^+}(x+2)e^{\frac{x+1}{x+2}}$

a) $A = \infty$ b) A = 1 c) A = 0 d) Một đáp số khác.

35. Tìm $A = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$

a) A = e b) $A = \sqrt{e}$ c) $A = e^2$ d) $A = \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

36. Cho f(x) và g(x) là hai hàm số xác định và có đạo hàm trên R thì đạo hàm của $g_o f(x)$ là :

a) $g'(x)\times f'(x)$ b) $g(f'(x))+g'(f(x))$

c) $g(x).f'(x)+g'(x).f(x)$ d) $g'(f(x))\times f'(x)$

37. Cho hàm số f(x) xác định trên R và $x_0 \in R$ thì :

a) Nếu f(x) liên tục tại x_0 thì tồn tại $\lim_{x\to x_0} f(x)$

b) Nếu f(x) không có đạo hàm tại x_0 thì không tồn tại $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

c) Nếu f(x) không có đạo hàm tại x_0 thì f(x) không liên tục tại x_0.

d) Cả a), b) và c) đều sai.

38. Cho (C) là đồ thị của hàm số y = f(x), x ∈ R thì ta có :

a) f '(1) là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm M(2 ; f(2)).

b) f '(−1) là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm N(−1 ; f(−1)).

c) $f'(3)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $I(3\ ;\ f(3))$.

d) Cả a), b) và c) đều sai.

39. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \ln x (x > 0)$

a) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ b) $y^{(n)} = \ln^n x$,

c) $y^{(n)} = \dfrac{\ln x}{x^n}$ d) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^n}$.

40. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = 2^x$

a) $y^{(n)} = 2^{nx}$ b) $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$

c) $y^{(n)} = 2^{x^n}$ d) $y^{(n)} = \dfrac{2^x}{\ln^n 2}$.

41. Tính đạo hàm cấp n cua hàm số $y = f(x) = \sin x$

a) $y^{(n)} = \sin x$ b) $y^{(n)} = \cos x$

c) $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ d) Một đáp số khác.

42. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \cos x$

a) $y^{(n)} = \cos^n x$ b) $y^{(n)} = -\sin^n x$

c) $y^{(n)} = \cos(x + n.\pi)$ d) $y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

43. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$

a) $y^{(n)} = n!x^{\frac{3n}{2}}$ b) $y^{(n)} = \dfrac{n!}{2^n}\sqrt{x}$

c) $y^{(n)} = 2^n x\sqrt{x}$ d) Một đáp số khác.

44. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \cos 2x$

a) $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $y^{(n)} = 2^n \cos x$

c) $y^{(n)} = 2^n \sin x$ d) $y^{(n)} = 2^n \cos nx$.

45. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = 2^x + 2^{-x}$

a) $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$ b) $y^{(n)} = \left[2^x + (-1)^n 2^{-x}\right]\ln^n 2$

c) $y^{(n)} = c\left(4^x - 1\right)\ln x$ d) Ca a), b), c) đều sai.

46. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2x+1}$

a) $y^{(n)} = \frac{n!}{(2x+1)^n}$ b) $y^{(n)} = \frac{n!}{(2x+1)^{n+1}}$

c) $y^{(n)} = \frac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$ d) $y^{(n)} = -n!(2x+1)^{-(n+1)}$.

47. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = \cos^4 x$

a) $y^{(n)} = \cos^{4n} x$

b) $y^{(n)} = 4^n \cos^4 x$

c) $y^{(n)} = 2^n \cos\left(4x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

d) $y^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 2^{2n-3}\cos\left(4x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

48. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x) = 3 - 5\cos^2 x$

a) $y^{(n)} = -5^n \cos^2 x$ b) $y^{(n)} = -5^n \cos^{2n} x$

c) $y^{(n)} = -5\cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ d) $y^{(n)} = -5.2^{n-1}\cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

49. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ thoả mãn phương trình :

a) $x^2y'' + xy' + y = 0$ b) $y'' - xy' + x^2y = 0$

c) $x^2y'' - xy' + y = 0$ d) $x^2y'' + xy' - y = 0$.

50. Tìm một hệ thức giữa y, y', y" của hàm số $y = x + \sin 2x$

a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' + 4y - 4x = 0$

c) $y'' - xy + 4x^2 = 0$ d) $y'' - 4y + 4x = 0$.

51. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \sin^2 x$

a) $F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$ b) $F(x) = \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

52. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\cos^2 x$

a) $F(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$ b) $F(x)=-\frac{1}{4}(2x+\sin 2x)+C$

c) $F(x)=\frac{1}{4}(x+\sin x\cos x)+C$ d) Một đáp số khác.

53. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\tan^2 x$

a) $F(x)=\tan x+x+C$ b) $F(x)=\tan x-x+C$

c) $F(x)=\tan x+C$ d) $F(x)=\cot x+C$

54. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\sin^3 x$

a) $F(x)=\frac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{\cos 3x}{3}\right)+C$

b) $F(x)=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

c) $F(x)=-\frac{1}{3}(\cos x\sin^2 x+2\cos x)+C$

d) Cả a), b), c) đều đúng.

55. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\cos^3 x$

a) $F(x)=\frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+C$

b) $F(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

c) $F(x)=\frac{1}{3}(\sin x\cos^2 x+2\sin x)+C.$

d) Cả a), b), c) đều đúng

56. Tính $A=\int\sin^2 x\cos x dx$

a) $A=-\cos^2 x+C$ b) $A=\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

c) $A=\frac{\sin^3 x}{3}+C$ d) $A=\tan^3 x+C.$

57. Tính $A = \int \sin^3 x \cos x dx$

a) $A = -\cos^4 x + C$ b) $A = \cos^4 x + C$

c) $A = \sin^4 x + C$ d) $A = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

58. Tính $A = \int \sin^4 x \cos x dx$

a) $A = \sin^5 x + C$ b) $A = \cos^5 x + C$

c) $A = -\frac{1}{5}\sin^5 x + C$ d) $A = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

59. Tính $A = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$

a) $A = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$ b) $A = \sin^3 x - \sin^5 x + C$

c) $A = -\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

60. Tính $A = \int \cos^2 x \sin x dx$

a) $A = \frac{\cos^3 x}{2} + C$ b) $A = -\cos^3 x + C$

c) $A = \cot^3 x + C$ d) Một đáp số khác.

61. Tính $A = \int \cos^3 x \sin x dx$

a) $A = -\cos^4 x + C$ b) $A = \frac{\cos^4 x}{4} + C$

c) $A = -\frac{\sin^4 x}{4} + C$ d) $A = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

62. Tính $A = \int \cos^4 x \sin x dx$

a) $A = \cos^5 x + C$ b) $A = \frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $A = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

63. Tính $A = \int \cos^4 x \sin^3 x dx$

a) $A = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$ b) $A = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $A = \frac{\cos^7 x}{7} + C$ d) $A = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$

64. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \cos 5x \cos x$

a) $F(x) = \sin 6x + C$ b) $F(x) = \frac{\sin 6x}{6} + C$

c) $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$ d) $F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C.$

65. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin 5x \cos 3x$

a) $F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C$ b) $F(x) = \cos 8x + \cos 2x + C$

c) $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} + C$ d) $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C.$

66. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin 5x \sin x$

a) $F(x) = \frac{\sin 4x}{4} + C$ b) $F(x) = -\sin 6x + \sin 4x + C$

c) $F(x) = \frac{\sin 6x}{6} + C$ d) $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{6}\right) + C.$

67. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos^4 x$

a) $F(x) = -\sin^5 x + \cos^5 x + C$ b) $F(x) = \frac{1}{4}\left(3x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{4}\left(3x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$ d) $F(x) = 3x + \frac{\sin 4x}{4} + C.$

68. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

a) $F(x) = \sin^7 x + \cos^7 x + C$ b) $F(x) = \frac{1}{8}\left(5x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$

c) $F(x) = 5x + \sin 4x + C$ d) $F(x) = \frac{1}{4}\left(5x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C.$

69. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin 2x \sin 3x \sin 4x$

a) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{9}\cos 9x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + C$

b) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\cos 9x - \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{9}\cos 9x - \frac{1}{5}\cos 5x + C$

d) Một biểu thức khác.

70. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin 2x \sin 3x \cos 4x$

a) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - \sin x\right) + C$

b) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\sin 9x - \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{9}\sin 9x - \frac{1}{5}\sin 5x + C$

d) $F(x) = -\frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{5}\sin 5x + C.$

71. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \cos 2x \cos 3x \sin 4x$

a) $F(x) = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x - \cos x + C$

b) $F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\cos 9x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right) + C$

c) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\cos 9x - \cos x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$

d) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\sin 9x - \sin x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C.$

72. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \cos 2x \cos 3x \cos 4x$

a) $F(x) = \frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x + C$

b) $F(x) = \sin 9x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x + C$

c) $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C$

d) $F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C.$

73. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin^3 x\cos 10x$

a) $F(x) = \cos^3 x\cos 10x + C$

b) $F(x) = -10\sin^3 x\sin 10x + C$

c) $F(x) = \frac{1}{13}\cos 13x - \frac{3}{11}\cos 11x + \frac{1}{3}\cos 9x - \frac{1}{7} + C$

d) $F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{\cos 13x}{13} - \frac{\cos 11x}{11} + \frac{\cos 9x}{3} - \frac{\cos 7x}{7}\right) + C.$

74. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \cos^3 x\cos 10x$

a) $F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{13}\sin 13x + \frac{3}{11}\sin 11x + \frac{1}{3}\sin 9x + \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C$

b) $F(x) = \sin 13x + 3\sin 11x + \sin 9x + \sin 7x + C$

c) $F(x) = -\cos 13x - 3\cos 11x + \sin 9x + \sin 7x + C$

d) $F(x) = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sin 13x}{13} + \frac{\sin 11x}{11} + \frac{\sin 9x}{3}\right) + C.$

75. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \sin^3 x\sin 10x$

a) $F(x) = \cos 13 + \cos 11x + C$

b) $F(x) = -\frac{1}{8}\left(-\frac{\sin 13x}{13} + \frac{3\sin 11x}{11} - \frac{\sin 9x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C$

c) $F(x) = \sin 13x + \sin 11x - \sin 9x - \sin 7x + C$

d) $F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 13x}{13} + \frac{\sin 11x}{11} - \frac{\sin 9x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C.$

76. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \cos^3 x\sin 10x$

a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x\cos 10x + C$

b) $F(x) = \frac{\sin^3 x\cos 10x}{3} + \frac{\cos^3 x\sin 10x}{10} + C$

c) $F(x)=-\frac{1}{8}\left(\frac{\cos 13x}{13}+\frac{3\cos 11x}{11}+\frac{\cos 9x}{3}+\frac{\cos 7x}{7}\right)+C$

d) Các kết quả trên đều sai.

77. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số: $f(x)=\sin^4 x$

a) $F(x)=\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

b) $F(x)=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)+C$

c) $F(x)=\frac{1}{8}(3\sin 2x-4\sin 4x)+C$

d) $F(x)=\frac{1}{8}\left(3x-2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

78. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\cos^4 x$

a) $F(x)=-4\sin x\cos^3 x+C$

b) $F(x)=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x\right)+C$

c) $F(x)=3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+C$

d) $F(x)=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

79. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\ln x$

a) $F(x)=(\ln x-1)x+C$

b) $F(x)=x\ln x-1+C$

c) $F(x)=(\ln x+1)x+C$

d) $F(x)=\frac{1}{2}x(\ln x-1)+C.$

80. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\ln^2 x$

a) $F(x)=x\ln^2 x+C$

b) $F(x)=(\ln^2 x-2\ln x+2)x+C$

c) $F(x)=x(\ln^2 x-1)+C$

d) $F(x)=(\ln x-1)^2 x+C.$

81. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\ln^3 x$

a) $F(x)=\ln^4 x+C$

b) $F(x)=\frac{1}{4}\ln^4 x+C$

c) $F(x) = x\left(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6\right) + C$

d) $F(x) = x\ln^3 x + C.$

82. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = x\ln x$

a) $F(x) = x\ln x + C$
b) $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x + C$

c) $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - 1 + C$
d) $F(x) = \frac{(2\ln x - 1)x^2}{4} + C.$

83. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = x^2\ln x$

a) $F(x) = 3\ln x - x + C$
b) $F(x) = \ln^2 x + x + C$

c) $F(x) = \frac{(1 - 3\ln x)x^3}{9} + C$
d) $F(x) = \frac{(3\ln x - 1)x^3}{9} + C.$

84. Tính $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

a) $I = \tan x + C$
b) $I = -\cot x + C$

c) $I = \tan x - \cot x + C$
d) $I = \tan x + \cot x + C.$

85. Tính $I = \int\sqrt{x}dx$

a) $I = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
b) $I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $I = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
d) Cả a), b), c) đều đúng.

86. Tính $I = \int\sqrt[3]{x}dx$

a) $I = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$
b) $I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

c) $I = \frac{3}{4}x\sqrt{x} + C$
d) Cả a), b), c) đều đúng.

87. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x - 1}$

a) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x - 1| + C$
b) $F(x) = \ln|3x - 1| + C$

c) $F(x) = \frac{-1}{(3x - 1)^2} + C$
d) $F(x) = \frac{-3}{(3x - 1)^2} + C.$

88. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$

a) $F(x)=\frac{-1}{(x-2)^3}+C$ b) $F(x)=\frac{1}{x-2}+C$

c) $F(x)=\frac{-1}{x-2}+C$ d) Một đáp số khác.

89. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$

a) $F(x)=\ln|x^2-4x+3|+C$ b) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|+C$

c) $F(x)=\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$ d) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$

90. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

a) $F(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ b) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

c) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ d) $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

91. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

a) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ b) $F(x)=\ln(x^2+1)+C$

c) $F(x)=2x+C$ d) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

92. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$

a) $F(x)=\ln|x^2-4x+3|+C$ b) $F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3|+C$

c) $F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3|+C$ d) $F(x)=2\ln|x^2-4x+3|+C.$

93. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x)=\frac{(x^2-1)^2}{x^3-3x^2+3x-5}$

a) $F(x) = \ln(x-1)^2 + C$ b) $F(x) = \ln|x^3 - 3x^2 + 3x - 5| + C$

c) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|(x-1)^3 - 4| + C$ d) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 3x^2 + 3x - 5| + C.$

94. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

a) $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + C$ b) $F(x) = x^2 + \ln|x-1| + C$

c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$ d) Một đáp số khác.

95. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + 1}$

a) $F(x) = x^2 + C$ b) $F(x) = 2x + C$

c) $F(x) = -\frac{x^3}{3} + C$ d) $F(x) = \frac{x^3}{3} + C.$

96. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$

a) $F(x) = x^2 - x + 2 + C$ b) $F(x) = 2x - 1 + C$

c) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$ d) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$

97. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $F(x) = x^2 - x + 1 + C$ b) $F(x) = 2x - 1 + C$

c) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ d) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$

98. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

a) $F(x) = x^2 + x + 1 + C$ b) $F(x) = 2x + 1 + C$

c) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$ d) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$

99. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số : $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$

a) $F(x) = x^2 + 1 + C$ b) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x + C$

c) $F(x) = 2x + C$ d) $F(x) = x^3 + x + C.$

100. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

a) $F(x) = x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ b) $F(x) = x + \arctan x + C$

c) $F(x) = x - \arctan x + C$ d) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \arctan x + C.$

101. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

a) $F(x) = x - \dfrac{x}{x^2 + 1} + C$ b) $F(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

c) $F(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ d) $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

102. Tìm họ nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$

a) $F(x) = x^3 - x + C$

b) $F(x) = 3x^2 - 1 + C$

c) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C$

d) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

103. Tính $I = \int \dfrac{x^6 + x^5 + x^4 + 2}{x^6 + 1}dx$

a) $I = x + \dfrac{1}{6}\ln(x^2 + 1) + C$

b) $I = x - \dfrac{1}{6}\ln(x^2 + 1) + \arctan x + C$

c) $I = x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + \arctan x + \arctan(x^3) + C$

d) $I = x + \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + \arctan x + \frac{1}{3}\arctan(x^3) + C.$

104. Tính $I = \int \tan x dx$

a) $I = \cot x + C$

b) $I = \ln|\sin x| + C$

c) $I = \ln|\cos x| + C$

d) $I = -\ln|\cos x| + C.$

105. Tính $I = \int \cot x dx$

a) $I = \tan x + C$

b) $I = \ln|\cos x| + C$

c) $I = -\ln|\sin x| + C$

d) $I = \ln|\sin x| + C.$

106. Tính $I = \int \tan^3 x dx$

a) $I = \frac{\tan^2 x}{2} + x + C$

b) $I = \frac{\tan^2 x}{2} - x + C$

c) $I = \ln|\cos^3 x| + C$

d) $I = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$

107. Tính $I = \int \tan^4 x dx$

a) $I = \frac{\tan^4 x}{4} + C$

b) $I = \frac{\tan^5 x}{5} + C$

c) $I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$

d) Một đáp số khác.

108. Tính $I = \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

a) $I = \ln(1+\sin x) + C$

b) $I = \ln|\sin x| + C$

c) $I = \ln(1-\sin x) + C$

d) Một đáp số khác.

109. Tính $I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

a) $I = -2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

b) $I = \ln\frac{1}{1+\cos x} + C$

c) $I = -\ln(1+\cos x) + C$

d) Cả a), b), c) đều đúng.

110. Tính $I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

a) $I = \ln(1+\sin^2 x) + C$ b) $I = 2\ln|\sin x| + C$

c) $I = \ln(1+\cos^2 x) + C$ d) Một đáp số khác.

111. Tính tích phân $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

a) $I = \cos x - \frac{1}{\cos x} + C$ b) $I = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} + C$

c) $I = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$ d) Một đáp số khác.

112. Tính tích phân $I = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

a) $I = \ln(e^x+1) + C$ b) $I = e^x + 1 + C$

c) $I = e^{2x} + 1 + C$ d) $I = \ln(e^{2x}+1) + C$.

113. Tính tích phân $I = \int \ln x dx$

a) $I = x\ln x + C$ b) $I = x\ln x + x + C$

c) $I = x\ln x - x + C$ d) $I = \ln x - x + C$.

114. Tính tích phân $I = \int x\ln x dx$

a) $I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{2} + C$ b) $I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

c) $I = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2} + C$ d) $I = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

115. Tính tích phân $I = \int x^3 \ln x dx$

a) $I = \frac{x^4}{4}\ln x + C$ b) $I = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$

c) $I = \frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{16} + C$ d) $I = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{4} + C$.

116. Tính $I = \int \frac{\ln x}{x}dx$

a) $I = \ln^2 x + C$ b) $I = x\ln^2 x + C$

c) $I = 2\ln^2 x + C$ d) $I = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

117. Tính tích phân $I = \int x\cos x dx$

a) $I = \frac{-x^2}{2}\sin x + C$ b) $I = x\sin x + \cos x + C$

c) $I = \cos x - x\sin x + C$ d) $I = x\sin x - \cos x + C.$

118. Tính tích phân $I = \int xe^x dx$

a) $I = xe^x + C$ b) $I = xe^x + e^x + C$

c) $I = xe^x - x + C$ d) $I = xe^x - e^x + C.$

119. Tính tích phân $I = \int xe^x dx$

a) $I = xe^x + C$ b) $I = (x-1)e^x + C$

c) $I = \frac{x^2}{2}e^x + C$ d) $I = (x+1)e^x + C.$

120. Tính tích phân $I = \int x^2e^x dx$

a) $I = x^2e^x + C$ b) $I = \frac{x^3}{3}e^x + C$

c) $I = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ d) $I = (x^2 + 2x + 2)e^x + C.$

121. Tính tích phân $I = \int x\sin x dx$

a) $I = \frac{x^2}{2}\sin x + C$ b) $I = -\frac{x^2}{2}\cos x + C$

c) $I = -x\cos x + C$ d) $I = -x\cos x + \sin x + C.$

122. Tính tích phân $I = \int x\cos x dx$

a) $I = \frac{x^2}{2}\cos x + C$ b) $I = \frac{x^2}{2}\sin x + C$

c) $I = x\sin x + C$ d) Một đáp số khác

123. Tính tích phân $I = \int e^x\sin x dx$

a) $I = (\sin x - \cos x)\frac{e^x}{2} + C$ b) $I = e^x\cos x + C$

c) $I = -e^x\sin x + C$ d) $I = (\sin x - \cos x)e^x + C.$

124. Tính tích phân $I = \int e^x \cos x dx$

a) $I = e^x \sin x + C$ b) $I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$

c) $I = -e^x \sin x + C$ d) $I = (\sin x + \cos x)e^x + C$.

125. Tính tích phân $I = \int x^2 \sin x dx$

a) $I = -x^2 \cos x + C$ b) $I = \frac{x^3}{3}\sin x + C$

c) $I = -\frac{x^3}{3}\cos x + C$ d) $I = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$.

126. Tính $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

a) $I = -\frac{1}{3}(x^2 + 4)\sqrt{2 - x^2} + C$ b) $I = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - x^2} + C$

c) $I = -\frac{1}{3}(x^2 - 4)\sqrt{2 - x^2} + C$ d) Một đáp số khác.

127. Tính $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$

a) $I = x\sqrt{x^2 + 1} - x + C$

b) $I = \sqrt{x^2 + 1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C$

c) $I = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right| + C$

d) Một đáp số khác.

128. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \sin\sqrt{x}$.

a) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}\right) + C$ b) $-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$

c) $-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x} + C$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$.

129. Tính tích phân $I = \int x^5 e^{x^2} dx$

a) $I = (x^4 - 2x^2 + 2)\frac{e^{x^2}}{2} + C$ b) $I = \frac{x^6}{6}e^{x^2} + C$

c) $I = 2x^6 e^{x^2} + C$ d) $I = 5x^4 e^x + C$.

130. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \sin(\ln x)$.

a) $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$ b) $\cos(\ln x) + C$

c) $\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + C$ d) $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] + C$.

131. Tính $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$

a) $I = 1$ b) $I = 0$ c) $I = -1$ d) $I = \frac{1}{2}$.

132. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$

a) $I = 1$ b) $I = \ln 2$ c) $I = -\ln 2$ d) Một đáp số khác.

133. Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 1}$

a) $I = 1$ b) $I = \ln 2$ c) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ d) $I = -\frac{1}{2}\ln 2$.

134. Tính $I = \int_2^3 \frac{xdx}{x^2 - 1}$

a) $I = \ln 2$ b) $I = \ln 8 - \ln 3$

c) $I = 2\ln 2$ d) $I = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

135. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{2x + 1}$

a) $I = \frac{1}{2}\ln 3$ b) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ c) $I = \ln 3$ d) $I = \ln\sqrt[3]{3}$.

136. Tính $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}$

a) $I = 1$ b) $I = \frac{1}{2}$ c) $I = \frac{1}{3}$ d) $I = 2$.

137. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

a) $I = \ln\frac{3}{2}$ b) $I = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$

c) $I = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ d) $I = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

138. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

a) $I = 1$ b) $I = \ln\frac{3}{4}$

c) $I = \ln 2$ d) Một đáp số khác.

139. Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

a) $I = \frac{1}{8}$ b) $I = \frac{1}{4}$ c) $I = 2$ d) $I = -\frac{1}{8}$.

140. Tính $I = \int_0^2 \frac{(2x+4)dx}{x^2 - 2x + 3}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = -1$ d) $I = 0$.

141. Tính $I = \int_0^2 \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 3}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = -1$ d) $I = 0$.

142. Tính $I = \int_0^1 \sqrt{x}dx$

a) $I = \frac{2}{3}$ b) $I = \frac{3}{2}$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) Một đáp số khác.

143. Tính $I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

a) $I = \frac{14}{3}$ b) $I = 2$ c) $I = 1$ d) $I = 3$.

144. Tính $I = \int_0^1 \sqrt[3]{x}dx$

a) $I = 3$ b) $I = 4$ c) $I = \frac{3}{4}$ d) $I = \frac{4}{3}$.

145. Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = \frac{3}{2}$ d) $I = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

146. Tính $I = \int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$

a) $I = \frac{2}{3}$ b) $I = \frac{4}{3}$ c) $I = 1$ d) Cả a), b), c) đều sai.

147. Tính $I = \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = -3$ d) $I = 3$.

148. Tính $I = \int_0^1 \sqrt{x+1}dx$

a) $I = \frac{2}{3}$ b) $I = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

c) $I = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$ d) $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

149. Tính $I = \int_0^1 \sqrt{x-1}dx$

a) $I = 0$ b) $I = 1$ c) $I = -1$ d) I không tồn tại.

150. Tính $I = \int_1^5 \sqrt{x-1}dx$

a) $I = \frac{16}{3}$ b) $I = \frac{2}{3}$ c) $I = \frac{4}{3}$ d) $I = \frac{8}{3}$.

151. Tính $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = 3$ d) $I = 4$.

152. Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{x}dx$

a) $I = 1$ b) $I = \frac{1}{5}$ c) $I = \frac{2}{5}$ d) $I = \frac{3}{5}$.

153. Tính $I = \int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

a) $I = 0$ b) $I = 2$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) $I = 1$.

154. Tính $I = \int_0^1 x^2\sqrt[3]{x}dx$

a) $I = 1$ b) $I = \frac{10}{3}$ c) $I = \frac{3}{10}$ d) Một đáp số khác.

155. Tính $I = \int_1^6 \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $I = \frac{64}{45}$ b) $I = \frac{45}{64}$ c) $I = 1$ d) $I = \frac{1}{2}$.

156. Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$

a) $I = 1$ b) $I = 2$

c) $I = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$ d) $I = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{15}$.

157. Tính $I = \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

a) $I = -\ln[3(3-2\sqrt{2})]$ b) $I = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

c) $I = \ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3}$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

158. Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$

a) $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ b) $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $I = \frac{2}{3}$.

159. Tính $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $I = 0$ b) $I = 2\sqrt{2}$ c) $I = \sqrt{3}$ d) $I = 1$.

160. Tính $I = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$

a) $I = 1$ b) $I = \frac{2\sqrt{2}}{15}$

c) $I = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$ d) $I = 2$.

161. Tính $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $I = 1$ b) $I = \frac{1}{3}$ c) $I = \frac{2}{3}$ d) $I = \frac{4}{3}$.

162. Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $I = \sqrt{2}-1$ b) $I = \sqrt{2}+1$ c) $I = \sqrt{2}$ d) $I = 2\sqrt{2}$.

163. Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $I = 0$ b) $I = 1$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) I không tồn tại.

164. Tính $I = \int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $I = 2\sqrt{2}$ b) $I = \sqrt{3}$

c) $I = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ d) $I = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

165. Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ d) $I = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

166. Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}$

a) $I = 0$ b) $I = 1$ c) $I = -1$ d) I không tồn tại.

167. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$

a) $I = 2$ b) $I = 2 - \ln 2$ c) $I = 2 + \ln 2$ d) $I = \frac{2 - \ln 2}{2}$.

168. Tính $I = \int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$

a) $I = 1$ b) $I = -1$ c) $I = \frac{4}{3}$ d) $I = -\frac{4}{3}$.

169. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

a) $I = 1 + \sqrt{2}$ b) $I = 1 - \sqrt{2}$

c) $I = \ln(1 + \sqrt{2})$ d) $I = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

170. Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$

a) $I = \ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ b) $I = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

c) $I = \ln 2$ d) $I = \ln 2\sqrt{3}$.

171. Tính $I = \int_0^{\pi/3} \sin x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = 2$ c) $I = \frac{1}{3}$ d) $I = 3$.

172. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \sin x dx$

a) $I = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $I = 1$ d) Một đáp số khác.

173. Tính $I = \int_{\pi/3}^{\pi} \sin x dx$

a) $I = 1$ b) $I = -1$ c) $I = \frac{3}{2}$ d) $I = -\frac{3}{2}$.

174. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

a) $I = 0$ b) $I = -1$ c) $I = 2$ d) $I = 1$.

175. Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $I = 0$ d) Một đáp số khác.

176. Tính $I = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx$

a) $I = 2$ b) $I = -2$ c) $I = 1$ d) $I = 0$.

177. Tính $I = \int_{\pi/2}^{0} \sin x dx$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = -1$ d) $I = -2$.

178. Tính $I = \int_0^{\pi} \sin x dx$

a) $I = 2$ b) $I = -2$ c) $I = 1$ d) $I = -1$.

179. Tính $I = \int_{\pi}^{0} \sin x dx$

a) $I = 2$ b) $I = -2$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) $I = -\frac{1}{2}$.

180. Tính $I = \int_0^{\pi/6} \cos x dx$

a) $I = 1$ b) $I = -1$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) $I = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

181. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \cos x dx$

a) $I = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ b) $I = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ c) $I = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

182. Tính $I = \int_0^{\pi/3} \cos x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = -\frac{1}{2}$ c) $I = 1$ d) Một đáp số khác.

183. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = -\frac{1}{2}$ c) $I = -1$ d) $I = 1$.

184. Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx$

a) $I = -\frac{1}{2}$ b) $I = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $I = \frac{1}{2}$ d) Cả a), b), c) đều sai.

185. Tính $I = \int_0^{\pi} \cos x dx$

a) $I = -2$ b) $I = 0$ c) $I = 2$ d) Một đáp số khác.

186. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$

a) $I = 2$ b) $I = 0$ c) $I = -2$ d) $I = \pi$.

187. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = -\frac{1}{2}$ c) $I = 1$ d) Một đáp số khác.

188. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$

a) $I = 0$ b) $I = 1$ c) $I = -1$ d) $I = 2$.

189. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x dx$

a) $I = 2$ b) $I = -2$ c) $I = 0$ d) Một đáp số khác.

190. Tính $I = \int_0^{\pi} \sin 2x dx$

a) $I = 2$ b) $I = -2$ c) $I = 1$ d) $I = 0$.

191. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$

a) $I = -2$ b) $I = 2$ c) $I = -1$ d) Cả a), b), c) đều sai.

192. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$

a) $I = -2$ b) $I = 2$ c) $I = 1$ d) $I = 0$.

193. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x dx$

a) $I = -2$ b) $I = 2$ c) $I = 0$ d) $I = 1$.

194. Tính $I = \int_0^{\pi} \cos 2x dx$

a) $I = 2$ b) $I = 0$ c) $I = 1$ d) Một đáp số khác.

195. Tính $I = \int_0^{\pi/6} \tan x dx$

a) $I = \ln\frac{3}{2}$ b) $I = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $I = \ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) Cả b) và c) đều đúng.

196. Tính $I = \int_0^{\pi/4} \tan x dx$

a) $I = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $I = \ln\sqrt{2}$

c) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

197. Tính $I = \int_0^{\pi/3} \tan x dx$

a) $I = 0$ b) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ c) $I = -\ln 2$ d) $I = \ln 2$.

198. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = 2$ c) $I = -\frac{1}{2}$ d) $I = 1$.

199. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$

a) $I = 0$ b) $I = \frac{1}{2}$ c) $I = -\frac{1}{2}$ d) Một đáp số khác.

200. Tính $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$

a) $I = \frac{1}{2}\ln 3$ b) $I = 1$ c) $I = -1$ d) $I = -\frac{1}{2}\ln 3$.

201. Tính $I = \int_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 3}}$

a) $I = \pi$ b) $I = \frac{\pi}{2}$ c) $I = \frac{\pi}{3}$ d) $I = \frac{\pi}{6}$.

202. Tính $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

a) $I = \pi$ b) $I = \frac{\pi}{2}$ c) $I = \frac{\pi}{3}$ d) $I = \frac{\pi}{4}$.

203. Tính $I = \int_{0}^{\pi/4} \tan x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = \frac{2\pi}{3}$ c) $I = \ln\sqrt{2}$ d) Một đáp số khác.

204. Tính $I = \int_{0}^{\pi/4} \tan^2 x dx$

a) $I = 2$ b) $I = \frac{\pi}{3}$ c) $I = \ln 2$ d) $I = 1 - \frac{\pi}{4}$.

205. Tính $I = \int_{0}^{\pi/4} \tan^3 x dx$

a) $I = \frac{1 - \ln 2}{2}$ b) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ c) $I = \ln 2$ d) Một đáp số khác.

206. Tính $I = \int_{0}^{\pi/4} \tan^4 x dx$

a) $I = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$ b) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ c) $I = \frac{\pi}{4}$ d) $I = 1$.

207. Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x dx$

a) $I = \ln 2$ b) $I = \frac{1}{2}$ c) $I = \frac{\pi}{2}$ d) $I = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$.

208. Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x dx$

a) $I = 1 - \frac{\pi}{4}$ c) $I = \frac{\pi}{4} + 1$ c) $I = \frac{\pi}{2} - 1$ d) $I = \frac{3\pi}{4}$.

209. Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x dx$

a) $I = \frac{1 - \ln 2}{2}$

b) $I = \frac{1 + \ln 2}{4}$

c) $I = \ln 2$

d) Một đáp số khác.

210. Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4 x dx$

a) $I = \frac{1}{2}$ b) $I = \frac{1}{2}\ln 2$ c) $I = \frac{1 - \ln 2}{2}$ d) Một đáp số khác.

211. Cho $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Tìm một hệ thức giữa I_n và I_{n-1}.

a) $nI_n + (n-1)I_{n-1} = (a^2 + x^2)^{n+1}$

b) $nI_n - (n-1)I_{n-1} = (a^2 + x^2)^{n-1}$

c) $nI_n + (n-2)I_{n-1} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n}$

d) $I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$.

212. Cho $J_n = \int \sin^n x dx$, $n \in \mathbf{N}, n > 2$. Tìm một hệ thức giữa J_n và J_{n-2}

a) $nJ_n - (n-1)J_{n-1} = \cos x \sin^{n-1} x$

b) $nJ_n + (n-1)J_{n-1} = \cos x \sin^{n-1} x$

c) $nJ_n + (n-1)J_{n-2} = \cos x \sin^{n-1} x$

d) $(n-1)J_{n-2} - nJ_n = \cos x \sin^{n-1} x$.

213. Cho $K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $n \in \mathbf{N}$. Tìm một hệ thức giữa K_n và K_{n-2}.

a) $nK_n - (n-1)K_{n-2} = 0$

b) $nK_n + (n-1)K_{n-1} = 0$

c) $nK_n + (n-1)K_{n-2} = 2^n$

d) $(n-1)K_{n-2} - 2nK_n = 0$.

214. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Tìm một hệ thức giữa I_n và I_{n-2}.

a) $I_n - I_{n-2} = 0$

b) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

c) $nI_n + (n-1)I_{n-2} = 0$

d) $nI_n + (n-1)I_{n-2} = 1$.

215. Cho $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n \in \mathbf{N}$. Tìm hệ thức giữa I_{n+2} và I_n.

a) $I_{n-2} - nI_n = 0$ b) $(n+1)I_{n+2} - nI_n = \sin x$

c) $(n+1)I_{n+2} - nI_n = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x}$ d) $(n+1) - nI_n = \sin x$.

216. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n-1}.

a) $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{2n}$ b) $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2^n}$

c) $I_n - nI_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$ d) $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$.

217. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$. Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n-1}.

a) $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2n}$ b) $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{2^n}$

c) $I_n - (n-1)I_{n-1} = 0$ d) $I_{n-1} - I_n = \frac{1}{2^n}$.

218. Cho $I(m, p) = \int \frac{\sin^m x}{\cos^p x} dx$. Tìm hệ thức truy hồi để tính $I(m, p)$.

a) $(p-1)I(m, p) + (m-1)I(m-2, p-2) = \frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{p-1} x}$

b) $pI(m, p) + mI(m-1, p-1) = \frac{\sin^m x}{\cos^p x}$

c) $pI(m, p) + (m-1)I(m-1, p-1)\tan^{m+p} x = \tan^{m-p} x$

d) $(p-1)I(m, p) + (m-1)I(m-2, p-2) = \frac{\sin^m x}{\cos^p x}$.

219. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4x - x^2$ và $y = 0$

a) $S = \frac{32}{3}$ (đvdt) b) $S = 1$ (đvdt)

c) $S = \frac{23}{3}$ (đvdt) d) $S = \frac{3}{23}$ (đvdt).

220. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2 - x^2$

a) $S = \frac{3}{8}$ (đvdt) b) $S = \frac{8}{3}$ (đvdt)

c) $S = 8$ (đvdt) d) Một đáp số khác.

221. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$ và $y = x$

a) S = 1 (đvdt) b) S = 2 (đvdt)

c) $S = 1 - \ln 2$ (đvdt) d) Một đáp số khác.

222. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin^2 x + \sin x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$

a) $S = \frac{3}{4}$ (đvdt) b) $S = \frac{3\pi}{4}$ (đvdt)

c) $S = \frac{4\pi + 3}{3}$ (đvdt) d) Một đáp số khác.

223. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{1 + \cos x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$

a) $S = \frac{\pi}{2}$ (đvdt) b) S = 1 (đvdt)

c) $S = \frac{\pi}{4}$ (đvdt) d) $S = \frac{1}{3}$ (đvdt).

224. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2\pi$

a) S = 4 (đvdt) b) S = 0 (đvdt)

c) $S = \frac{\pi}{2}$ (đvdt) d) S = 2 (đvdt).

225. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$

a) S = 0 (đvdt) b) S = 1 (đvdt)

c) S = 2 (đvdt) d) $S = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

226. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo nên khi ta cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ quay quanh trục Ox

a) $V = \frac{\pi}{3}$ (đvtt) b) $V = \pi$ (đvtt)

c) $V = \frac{\pi}{2}$ (đvtt) d) $V = \frac{\pi^2}{3}$ (đvtt).

227. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo nên khi ta cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ quay quanh trục Ox

a) $V = \frac{33\pi}{5}$ (đvtt) b) $v = \frac{32\pi}{5}$ (đvtt)

c) $V = \pi^2$ (đvtt) d) $V = \frac{32\pi^2}{5}$ (đvtt).

228. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo nên khi ta cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$ quay quanh trục Ox

a) $V = \pi$ (đvtt) b) $V = \pi^2$ (đvtt)

c) $V = \frac{\pi}{3}$ (đvtt) d) $V = \frac{\pi^2}{2}$ (đvtt).

229. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo nên khi ta cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \pi$ quay quanh trục Ox

a) $V = \frac{\pi^2}{2}$ (đvtt) b) $V = \frac{3\pi^2}{4}$ (đvtt)

c) $V = \frac{\pi^2}{8}$ (đvtt) d) $V = \frac{3\pi^2}{8}$ (đvtt).

230. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo nên khi ta cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ quay quanh trục Ox

a) $V = \pi$ (đvtt) b) $V = \frac{e\pi^2}{2}$ (đvtt)

c) $V = \frac{(e^2 - 1)\pi}{2}$ (đvtt) d) $V = \pi^2$ (đvtt).

ĐÁP SỐ

1d	2d	3a	4d	5b	6c	7a	8b	9c	10d
11a	12d	13d	14b	15a	16d	17b	18a	19d	20d
21d	22a	23b	24c	25d	26d	27c	28b	29a	30b
31c	32d	33d	34c	35b	36d	37a	38b	39a	40b
41c	42d	43d	44a	45b	46c	47d	48d	49a	50b
51d	52d	53b	54d	55d	56c	57b	58d	59a	60d
61d	62c	63b	64c	65a	66b	67c	68b	69a	70b
71c	72d	73d	74a	75b	76c	77d	78d	79a	80b
81c	82d	83d	84c	85d	86d	87a	88b	89d	90c
91a	92b	93d	94c	95d	96c	97d	98d	99b	100c
101c	102d	103d	104d	105d	106d	107c	108a	109d	110a
111c	112a	113c	114b	115c	116d	117b	118d	119b	120c
121d	122d	123a	124b	125d	126a	127c	126a	129a	130a
131a	132b	133c	134d	135a	136b	137d	138d	139a	140c
141d	142a	143b	144c	145d	146d	147d	148c	149d	150a
151b	152c	153d	154c	155b	156c	157d	158a	159d	160c
161d	162a	163d	164d	165c	166d	167b	168c	169c	170a
171a	172b	173c	174d	175d	176d	177c	178a	179b	180c
181d	182d	183d	184c	185b	186a	187a	188b	189c	190d
191d	192d	193c	194b	195d	196d	197d	198d	199d	200a
201d	202a	203c	204d	205a	206b	207c	208b	209a	210d
211d	212d	213a	214b	215c	216d	217d	218a	219a	220b
221c	222d	223b	224a	225c	226a	227b	228d	229d	230c

2. ĐẠI SỐ TỔ HỢP - XÁC SUẤT

CÂU HỎI

1. Muốn đi từ tỉnh A đến tỉnh C, bắt buộc phải đi qua tỉnh B. Từ tỉnh A đến tỉnh B có 4 cách đi ; từ tỉnh B đến tỉnh C có 2 cách đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh C ?

a) 6 b) 8 c) 4 d) 2.

2. Từ các số 1, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau có chữ số khác nhau ?

a) 6 b) 3 c) 27 d) 15.

3. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 3 chữ số ?

a) 48 b) 126 c) 68 d) Một số khác.

4. Từ các số 2, 4, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số ?

a) 256 b) 24 c) 64 d) Một số khác.

5. Có bao nhiêu số có 2 chữ số, mà tất cả các chữ số đều là số lẻ ?

a) 20 b) 25 c) 10 d) 30.

6. Có bao nhiêu số có 5 chữ số, trong đó chữ số hàng chục nghìn và chữ số hàng đơn vị giống nhau, chữ số hàng nghìn và chữ số hàng chục giống nhau ?

a) 1000 b) 100 c) 900 d) Một số khác.

7. Có bao nhiêu số có 5 chữ số là bội số của 5 ?

a) 10080 b) 5040 c) 9000 d) 18000.

8. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số đã cho ?

a) 12 b) 20 c) 24 d) Một số khác.

9. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau không lớn hơn 345 ?

a) 33 b) 36 c) 24 d) 32.

10. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau không lớn hơn 345 ?

a) 16 b) 13 c) 15 d) Một số khác.

11. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường. Từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường. Từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường. Từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào đi trực tiếp từ thành phố B đến thành phố C. Hỏi có bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D ?

a) 2 b) 4 c) 12 d) 6.

12. Từ thành phố A đến thành B có thể đi bằng ôtô, tàu hoả, tàu thuỷ hoặc máy bay. Từ thành phố B đến thành phố C có thể đi bằng ôtô, tàu thuỷ hoặc máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách chọn phương tiện đi và về nếu ta không muốn dùng đường đi làm đường về trong cả hai chặng AB và BC ?

a) 12 b) 18 c) 72 d) Một số khác.

13. Một người có 7 áo sơ mi, trong đó có 3 sơ mi trắng và 5 quần, trong đó có 2 quần màu kem. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo sơ mi – quần, với sơ mi nào cũng được và quần nào cũng được ?

a) 35 b) 15 c) 20 d) 14.

14. Một người có 7 áo sơ mi, trong đó có 3 sơ mi trắng và 5 quần, trong đó có 2 quần màu kem. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo sơ mi – quần, với nếu chọn sơ mi trắng thì không chọn quần màu kem ?

a) 20 b) 29 c) 35 d) Một số khác.

15. Một buổi tiệc có 8 người đến và đi đều bắt tay nhau từng hai người một. Có bao nhiêu cái bắt tay tất cả ?

a) 24 b) 54 c) 38 d) 56.

16. Trong một giải bóng đá ngoại hạng có 12 đội tham gia. Thể thức thi đấu vòng tròn hai lượt (lượt đi và lượt về), mỗi đội phải thi đấu hai trận với tất cả các đội còn lại. Hỏi có bao nhiêu trận đấu ?

a) 66 b) 132 c) 2^{12} d) Một số khác.

17. Một lớp học chỉ có các bàn đôi. Thầy giáo chủ nhiệm lớp tính ra rằng có thể sắp xếp các học sinh của lớp ngồi theo 1640 sơ đồ khác nhau và số chỗ ngồi vừa đủ cho số học sinh của lớp. Tính số học sinh của lớp ?

a) 40 b) 42 c) 41 d) Một số khác.

18. Một học sinh có 7 quyển vở có màu bìa khác nhau. Em định chọn ra 2 quyển để ghi môn Toán, với 1 cuốn ghi Đại số ; 1 cuốn ghi Hình học. Hỏi em học sinh đó có mấy cách chọn ?

a) C_7^2 b) A_7^2 c) $C_7^2.A_7^2$ d) $C_7^2.C_5^2$.

19. Một tổ học tập có 12 người. Cần chia đều thành bốn nhóm I, II, III, IV. Hỏi có bao nhiêu cách chia ?

a) A_{12}^3 b) C_{12}^3 c) $A_{12}^3.C_{12}^3$ d) $C_{12}^3.C_9^3.C_6^3.C_3^3$.

20. Một tổ học tập có 12 người. Cần phải cử ra một tổ trưởng, một tổ phó và một phụ trách học tập. Hỏi có bao nhiêu cách phân công, biết rằng mọi người của tổ đều có thể làm được ?

a) C_{12}^3 b) A_{12}^3 c) $C_{12}^3.A_{12}^3$ d) A_9^3.

21. Cho 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Số các số gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ 6 chữ số đã cho là :

a) 120 b) 720 c) A_6^5 d) A_5^6.

22. Có bao nhiêu số lẻ gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

a) A_6^5 b) 720 c) 120 d) 360.

23. Trong mặt phẳng cho 10 điểm, trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác tạo bởi 10 điểm đã cho là :

a) C_{10}^3 b) A_{10}^3 c) $7C_{10}^3$ d) $C_{10}^1.C_9^1.C_8^1$.

24. Trong mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Dựng được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là các điểm đã cho ?

a) A_n^3 b) C_n^3 c) $(n-3)C_n^3$ d) $C_n^1.C_{n-1}^1.C_{n-2}^1$.

25. Có bao nhiêu cách hoán vị n phần tử sao cho trong đó ba phần tử a, b, c không bao giờ đứng liền nhau ($n > 3$)

a) $(n-3)!$ b) $(n-2)!$

c) $n! - 6(n-2)!$ d) A_n^3.

26. Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó chỉ có đúng m điểm thẳng hàng ($m < n$) ; $(n - m)$ điểm còn lại không có bất kì ba điểm nào thẳng hàng. Số các tam giác có thể dựng được từ các điểm đã cho là :

a) C_n^3 b) C_m^3 c) $C_n^3 - C_m^3$ d) C_{n-m}^3.

27. Số đường chéo của một đa giác lồi $n(n > 3)$ cạnh là :

a) A_n^2 b) $\frac{n(n-3)}{2}$ c) $C_n^2 - n$ d) Cả b) và c).

28. Một học sinh muốn chọn 20 trong 30 câu hỏi trắc nghiệm Toán. Nếu đã chọn 5 câu hỏi thì số cách chọn các câu hỏi còn lại là :

a) C_{30}^{15} b) C_{25}^5 c) C_{25}^{15} d) C_{30}^5.

29. Có bao nhiêu cách chọn 3 đại biểu trong số 5 người được đề cử ?

a) C_5^3 b) A_5^3 c) 10 d) Cả a) và c).

30. Có 12 đội bóng đá tham gia thi đấu. Thể lệ cuộc thi là bất kì hai đội nào cũng chỉ gặp nhau một lần. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu ?

a) C_{12}^2 b) A_{12}^2 c) 66 d) Cả a) và c).

31. Bạn An có một bộ truyện tranh gồm 7 tập về Sođốchô. Bạn Bình có một bộ truyện tranh Đôrêmôn gồm 9 tập. Hỏi hai bạn có thể trao đổi cho nhau mỗi lần 5 quyển truyện tranh theo bao nhiêu cách ?

a) C_7^5 b) $C_7^5.C_9^5$ c) 2646 d) Cả b) và c).

32. Một tổ học sinh gồm 12 bạn, trong đó có 2 nữ và 10 nam. Hỏi có thể có bao nhiêu cách cử ra một nhóm gồm 8 bạn, trong đó có ít nhất là một bạn nữ để tham gia trò chơi kéo co do nhà trường tổ chức ?

a) C_{12}^8 b) $C_2^1.C_{10}^7$ c) 450 d) $C_2^2.C_{10}^6$.

33. Một hộp có 10 viên bi, trong đó có 6 bi vàng và 4 bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 viên bi ?

a) 120 b) C_{10}^3 c) $C_6^3.C_4^3$ d) Cả a) và b).

34. Một hộp có 10 viên bi, trong đó có 6 bi vàng và 4 bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 2 viên bi vàng và 1 viên bi xanh ?

a) C_{10}^3 b) $C_6^2.C_4^1$ c) 60 d) Cả b) và c).

35. Một hộp có 10 viên bi, trong đó có 6 bi vàng và 4 bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra nhiều nhất là 2 viên bi vàng ?

a) 100 b) 96 c) 60 d) 36.

36. Một hộp có 10 viên bi, trong đó có 6 bi vàng và 4 bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra ít nhất là 2 viên bi vàng ?

a) $C_6^2.C_4^1$ b) C_6^3 c) 80 d) Một số khác.

37. Cho tập hợp A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8}. Số tập con X của tập hợp A thoả điều kiện X chứa 1 và không chứa 2 là :

a) 2^7 b) 64 c) 2^5 d) Một số khác.

38. Cho tập hợp A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8}. Số các số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập hợp A và không bắt đầu bởi 123 là :

a) 3360 b) 3348 c) A_8^5 d) C_8^5.

39. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau. Mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Số cách sắp xếp sao cho bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau là :

a) 6! b) 2.6!.6! c) 1036800 d) Cả b) và c).

40. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau. Mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Số cách sắp xếp sao cho bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau là :

a) $2^6.6!.6!$ b) 33177600 c) 2.6!.6! d) Cả c) và b).

41. Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 2 cuốn sách môn Toán, 4 cuốn sách môn Văn và 6 cuốn sách môn Anh văn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các cuốn sách lên một kệ sách dài, nếu mọi cuốn sách cùng môn được xếp kề nhau ?

a) 3!.2!.4!.6! b) 2!.4!.6! c) 207360 d) Cả a) và c).

42. Hội đồng quản trị của một công ti có 10 người. Hỏi có bao nhiêu cách cử một ban quản trị gồm : Chủ tịch, Phó Chủ tịch, Thư kí và 2 Uỷ viên, biết rằng 2 Uỷ viên được đề cử cuối cùng và trong họ không có ai kiêm nhiệm hai chức vụ ?

a) 6 b) 6!.6! c) 2.6!.6! d) Cả b) và c).

43. Cho 7 chữ số : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau ?

a) A_7^5 b) 1260 c) $A_6^4.A_5^3$ d) $A_6^4 + A_5^3$.

44. Một tổ học sinh có 8 nam và 6 nữ. Cần lấy một nhóm 5 người, trong đó có 3 nam và 2 nữ. Số cách chọn là :

a) $C_6^2.C_8^3$ b) $A_6^2.A_8^3$ c) $C_6^2.A_8^3$ d) $A_6^2.C_8^3$.

45. Có bao nhiêu số tự nhiên (được viết trong hệ đếm thập phân) gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau ?

a) 120 b) 9! c) 5! d) Cả a) và c).

46. Tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau là :

a) 9333240 b) 35.120.5! c) 35.120.9! d) $35.120.A_{10}^5$.

47. Cho 9 chữ số : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số không trùng nhau được lập từ các chữ số nói trên ?

a) C_9^4 b) A_9^4 c) 3024 d) Cả b) và c).

48. Tổng của tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số không trùng nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9 bằng :

a) 16798320 b) 8399160

c) 3024×1111 d) 3024×11110.

49. Có bao nhiêu số gồm 3 chữ số, trong đó chỉ có đúng một chữ số 5 ?

a) $A_9^1.A_8^1.A_7^1$ b) $C_9^1.C_8^1.C_7^1$ c) 225 d) 72.2.

50. Một tổ học sinh có 9 nam và 3 nữ. Cần chọn một nhóm 4 người để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau ?

a) A_{12}^4 b) C_{12}^4 c) $C_9^3.C_3^1$ d) Một kết quả khác.

51. Một tổ học sinh có 9 nam và 3 nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm 3 công việc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia ?

a) C_{12}^4 b) $C_{12}^4.C_8^4$ c) 34650 d) Cả b) và c).

52. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt. Trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong đó 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 là :

a) C_{37}^3 b) 5950 c) A_{37}^3 d) Một kết quả khác.

53. Cho các chữ số 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên sao cho số tạo thành là một số không có chữ số 7 ?

a) C_4^3 b) A_4^3 c) 24 d) Cả b) và c).

54. Cho các chữ số khác nhau 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số sao cho số tạo thành là một số nhỏ hơn 278 ?

a) A_4^2 b) A_5^3 c) 18 d) C_5^3.

55. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Số cách mà thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 3 học sinh để tham gia vào phục lễ khai giảng là :

a) C_{40}^3 b) A_{40}^3 c) 9880 d) Cả a) và c).

56. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Số cách mà thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 3 học sinh để tham gia vào phục lễ khai giảng, trong đó có 1 nam và 2 nữ là :

a) $A_{25}^2.A_{15}^2$ b) $C_{25}^1.C_{15}^2$ c) $C_{25}^1 + C_{15}^2$ d) $A_{25}^1.A_{15}^2$.

57. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Số cách mà thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 3 học sinh để tham gia vào phục vụ lễ khai giảng, trong đó có ít nhất 1 nam là :

a) $C_{40}^3 - C_{15}^3$ b) $A_{40}^3 - A_{15}^3$ c) 9425 d) Cả a) và c).

58. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên khác 0 ?

a) A_7^5 b) $4A_6^4 - 3A_5^3$ c) 1260 d) Cả b) và c).

59. Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau, nhỏ hơn 600000 được lập từ 10 chữ số đã cho ?

a) A_{10}^6 b) $10A_8^4$ c) $12A_8^4$ d) $22A_8^4$.

60. Có bao nhiêu cách phân phối 5 đồ vật cho 3 người, sao cho mỗi người đều nhận ít nhất là một đồ vật ?

a) 150 b) 20 c) 30 d) 50.

61. Xét ba mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(i) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n$

(ii) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

(iii) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

a) Chỉ (i) b) Chỉ (ii)

c) Cả (ii) và (iii) d) Cả (i), (ii) và (iii).

62. Giá trị của tích số $C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2$ là :

a) 7200 b) 1720 c) 2700 d) 2520.

63. Khi $A_n^5 = 6A_n^3$ thì giá trị n là :

a) 4 b) 2 c) 6 d) Một kết quả khác.

64. Xếp 4 quyển sách của 4 bộ môn khác nhau lên một kệ sách thì có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau ?

a) 24 b) 12 c) 240 d) 4^2.

65. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 trong 8 học sinh một trưởng ban đại diện, một phó trưởng ban đại diện và một thứ kí ban ?

a) C_8^3 b) 336 c) 120 d) 1680.

66. Có tất cả bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm 3 người trong 8 người xứng đáng ?

a) A_8^3 b) $C_8^1.C_7^1.C_6^1$ c) 56 d) 336.

67. Một nhóm học sinh gồm 10 bạn, đã kể cả bạn Duy. Muốn chọn ra một ban đại diện gồm 3 người nhưng bắt buộc trong ban đại diện chọn ra phải có bạn Duy. Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện như thế ?

a) C_9^2 b) C_9^3 c) A_9^2 d) A_9^3.

68. Một lớp học có 15 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách thành lập một ban đại diện gồm 3 nam và 2 nữ ?

a) 4800 b) 2630 c) 1502 d) Một kết quả khác.

69. Khi hoán vị các mẫu tự của chữ THANH với giả thiết mọi hoán vị đều tạo thành một chữ có nghĩa thì có tất cả bao nhiêu chữ được tạo thành ?

a) 75 b) 60 c) 125 d) 70.

70. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 người Việt Nam, 4 người Pháp và 2 người Mĩ ngồi trên một băng ghế dài, biết rằng những người cùng quốc tịch phải ngồi gần nhau ?

a) 1540 b) 1640 c) 1460 d) 1728.

71. Giá trị của n bằng bao nhiêu thì ta có $C_n^7 = C_n^5$?

a) 9 b) 8 c) 14 d) 12.

72. Xét các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(i) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 0 \Leftrightarrow n = -2$

(ii) $C_{2000}^{1998} = 1999000$

(iii) $A_3^2 + A_3^1 = 12$

a) Chỉ (i) b) Chỉ (ii) c) Chỉ (iii) d) Cả (i) và (iii).

73. Với $k \le n$, $k \in \mathbf{Z}^+$, trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng ?

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$ b) $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-k \\ n \end{pmatrix}$

c) $C(k\,;\,n) = C(n-k\,;\,n)$ d) Cả a), b) và c).

74. Trong 40 sinh viên Y khoa năm thứ 6 có 10 sinh viên nội trú. Có bao nhiêu cách khác nhau để thành lập một ban đại diện gồm 8 người mà chủ tịch phải là một sinh viên nội trú ?

a) $10C_{39}^7$ b) $C_{10}^1.C_{40}^8$ c) $10C_{40}^8$ d) Cả b) và c).

75. Với mọi $n \in \mathbf{Z}^+$, mệnh đề nào sau đây là sai ?

a) $1 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + \cdots + 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^n = 5^n$

b) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n > 0$

c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

d) Có ít nhất một trong ba mệnh đề a), b), c) là sai.

76. Xét lập luận để chứng minh trực tiếp $(1,1)^{10} > 2$ qua một số giai đoạn :

(i) Trong khai triển $(1+x)^{10}$ suy ra :

$(1+x)^{10} > 1 + 10x, \forall x > 0$ (1)

(ii) Thay x = 0,1 vào (1) ta được :

$(1+0,1)^{10} > 1 + 10.(0,1)$ (2)

(iii) Từ (2) suy ra $(1,1)^{10} > 2$ (đpcm)

Mệnh đề nào sau đây rút ra từ lập luận trên là sai ?

a) Giai đoạn (i) đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy

b) Giai đoạn (i) đã sử dụng bất đẳng thức Bernoulli

c) Giai đoạn (ii) được đánh giá là chính xác

d) Giai đoạn (iii) được đánh giá là chính xác.

77. Xét các giá trị $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n+1}{k} - 1$

b) Khi n lẻ thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \frac{n+1}{2}, \forall k \le n$

c) Khi n chẵn thì C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại $k = \frac{n}{2}$

d) Cả a), b), c) đều đúng.

78. Trong khai triển Nhị thức Newton $(a+b)^n$, khi tổng số các hệ số là 4096 thì giá trị nào sau đây chỉ ra hệ số có giá trị lớn nhất ?

a) C_8^4 b) C_{12}^6 c) C_{13}^7 d) C_{11}^6.

79. Với giá trị nào của cặp sắp thứ tự (k ; n) thì dãy ba số $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}$; $\forall k, n \in \mathbf{N}$ và $k + 3 \ge n$ lập thành một cấp số cộng ?

a) (6 ; 3) b) (3 ; 6) c) (4 ; 7) d) (7 ; 4).

80. Có 5 học sinh bị phạt đứng nghiêm trước cờ theo hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hàng ngang cho 5 học sinh đó ?

a) 120 b) 25 c) 60 d) 1200.

81. Có 5 học sinh được xếp vào một bàn tròn. Lựa chọn nào sau đây nêu lên số cách sắp xếp 5 học sinh đó ?

a) 120 b) 24 c) 25 d) Một kết quả khác.

82. Cho tập hợp B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt lập thành từ các phần tử của tập hợp B ?

a) 4050 b) 6020 c) 5040 d) 720.

83. Cho tập hợp B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số các số gồm 7 chữ số khác nhau trong đó các chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự đó ?

a) 720 b) 24 c) 240 d) 120.

84. Cho tập hợp B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số các số gồm 7 chữ số khác nhau, trong đó các chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo một trật tự tuỳ ý ?

a) 120 b) 240 c) 56 d) Một kết quả khác.

85. Với 5 điểm phân biệt trong mặt phẳng không có 3 điểm nào thẳng hàng. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số các đường thẳng được dựng nên mà mỗi đường thẳng đi qua 2 điểm trong 5 điểm nói trên ?

a) 20 b) 14 c) 10 d) Một kết quả khác.

86. Với 5 điểm phân biệt trong mặt phẳng không có 3 điểm nào thẳng hàng. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số các độ dài đại số nhiều nhất thành lập được khi chiếu các vectơ đi qua 2 điểm trong 5 điểm đó xuống một trục bất kì ?

a) 10 b) 15 c) 12 d) 20.

87. Với 5 điểm phân biệt trong mặt phẳng không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác với các đỉnh là 3 trong 5 đỉnh nói trên ?

a) 5 b) 10 c) 7 d) 12.

88. Có nhiều nhất bao nhiêu đường chéo của thập lục giác đều thành lập được bằng 10 điểm phân biệt trong mặt phẳng ?

a) 35 b) 40 c) 55 d) 30

89. Rút một lần 12 lá bài ra khỏi bộ bài tây 52 lá. Lựa chọn nào sau đây cho ta số các kết quả rút ra khác nhau ?

a) 13067852 b) 10367852 c) 17367852 d) 206379406870.

90. Một đa giác đơn lồi có 170 đường chéo. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số cạnh tương ứng của đa giác đó ?

a) 10 b) 16 c) 18 d) 20.

91. Với các số 1, 2, 3, 4, 5, có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau không bắt đầu bằng chữ số 2 ?

a) 64 b) 96 c) 72 d) 60.

92. Có nhiều nhất bao nhiêu cát tuyến đối với một đường tròn đã có sẵn 12 điểm phân biệt trên đó ?

a) 42 b) 60 c) 72 d) 66.

93. Có tất cả bao nhiêu tam giác nội tiếp trong một đường tròn mà các đỉnh là 9 điểm phân biệt sẵn có trên đường tròn đó ?

a) 56 b) 42 c) 28 d) Một kết quả khác.

94. Với các số 1, 2, 3, 4, 5, có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt không được có dạng $\overline{541bc}$?

a) 66 b) 78 c) 48 d) 118.

95. Có tất cả bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt ?

a) 648 b) 724 c) 684 d) Một kết quả khác.

96. Với các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số lẻ ?

a) 72 b) 68 c) 76 d) 60.

97. Với các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn ?

a) 32 b) 44 c) 64 d) 48.

98. Có tất cả bao nhiêu số gồm ba chữ số phân biệt không bắt đầu bằng số 7 ?

a) 720 b) 540 c) 448 d) Một kết quả khác.

99. Với các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt luôn có chữ số 6 ?

a) 1248 b) 648 c) 1280 d) 1800.

100. Một thùng táo có 100 quả, trong đó chỉ có 90% đạt chất lượng là sử dụng được. Lấy ngẫu nhiên ra 10 quả táo trong thùng đó. Số kết quả lấy ra khác nhau là :

a) C_{90}^{10} b) C_{100}^{10} c) A_{100}^{10} d) A_{90}^{10}.

101. Một thùng táo có 100 quả, trong đó chỉ có 90% đạt chất lượng là sử dụng được. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số chục 10 quả táo, trong đó có 2 quả táo không đạt yêu cầu ?

a) $C_{100}^{10}.C_{10}^{2}$ b) $C_{90}^{10}.C_{10}^{2}$ c) $C_{90}^{8}.C_{10}^{2}$ d) $A_{100}^{10}.C_{10}^{2}$.

102. Gieo một hột xúc sắc 6 mặt với k lần. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là sai :

(i) Có tất cả 6^k kết quả khác nhau nhận được.

(ii) Tổng số các đơn vị thu được lớn nhất là 6^k

(iii) Có 5^k kết quả mà trong đó mặt tam (˙·.) không xuất hiện lần nào ?

a) Chỉ (i) b) Chỉ (ii) c) Chỉ (iii) d) Cả (i), (ii) và (iii).

103. Từ các chữ số 1, 2, 3, ..., n có thể lập được bao nhiêu số gồm n chữ số phân biệt sao cho hai số nguyên 7 và 8 không đứng cạnh nhau ?

a) $(n-2)(n-1)!$ b) $(n-1).n!$

c) $\dfrac{(n-1).n!}{2}$ d) $(n-2)^n(n-1)^n$.

104. Có bao nhiêu số nguyên dương với các chữ số khác nhau có giá trị nhỏ hơn 10^4 ?

a) 7425 b) 5274 c) 2547 d) 7254.

105. Trong 100 vé số luôn được quy định trong cuộc xổ số nào đó có 2 vé trúng thưởng. Nếu mua 12 vé số thì có bao nhiêu khả năng có duy nhất một vé trúng thưởng ?

a) $C_{98}^{11} - C_2^1$ b) $C_{100}^{11} - 10$ c) $C_{100}^{11}.C_{98}^{2}$ d) $C_{97}^{11}.C_2^1$.

106. Trong 100 vé số luôn được quy định trong cuộc xổ số nào đó có 2 vé trúng thưởng. Nếu mua 12 vé số thì có bao nhiêu khả năng không có vé nào trúng thưởng ?

a) C_{100}^{12} b) $C_{100}^{12} - 10$ c) $C_{100}^{12}.C_{98}^{2}$ d) C_{98}^{12}.

107. Trong 100 vé số luôn được quy định trong cuộc xổ số nào đó có 2 vé trúng thưởng. Nếu mua 12 vé số thì có bao nhiêu khả năng có ít nhất một vé trúng thưởng ?

a) $C_{100}^{12} - C_{98}^{12}$ b) $C_{100}^{12} - C_{98}^{12}$ c) $C_{98}^{12} - C_2^1$ d) $C_{100}^{2} - C_{98}^{2}$.

108. Xét một thí nghiệm nông nghiệp trên ba chế độ : giống, phân, nước, Trong đó có 3 loại lúa giống, 2 loại phânvô cơ và hữu cơ, 3 loại chế độ tưới nước cấp 1, cấp 2, cấp 3. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí một thí nghiệm ?

a) 24 b) 12 c) 18 d) 20.

109. Xét tập hợp A = {* ;□; Ω ; 3}. Lựa chọn nào sau đây ghi lại một hoán vị của A ?

a) {* ; 3 ; Ω ; □}　　　　b) (□ ; * ; 3 ; □)

c) (* ; Ω ; □ ; □)　　　　d) Cả a), b) và c).

110. Cho 4 chữ số 3, 7, 9, 4. Có thể lập được bao nhiêu số gồm các chữ số phân biệt ?

a) C_4^4　　b) A_4^4　　c) P_4　　d) $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4$.

111. Khi $C_n^3 = 84$ thì giá trị của A_n^3 là bao nhiêu ?

a) 720　　b) 504　　c) A_{10}^3　　d) Cả a) và c).

112. Một tổ hợp các mẫu tự a, b, c, d, e, f. Tổ hợp đó có thể đại diện được cho bao nhiêu chỉnh hợp ?

a) 504　　b) 120　　c) 720　　d) 5760.

113. Trên tập nền B = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4}. Một trong những chỉnh hợp A_5^3 thực hiện trên B cho ta mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng nhất ?

a) (0 ; 2 ; 1)　　b) (3 ; 4 ; 1)　　c) (0 ; 2 ; 1)

d) Trong các mệnh đề a), b), c) chỉ có một mệnh đề sai.

114. Xét tam giác Pascal như hình vẽ bên. Cho biết tổng số đơn vị ở hàng thứ 12 là bao nhiêu ?

a) 2048　　b) 2^{11}

c) 2^{12}　　d) $2A_5^3$.

Hàng 1	1				
Hàng 2	1	1			
Hàng 3	1	2	1		
Hàng 4	1	3	3	1	
Hàng 5	1	1	6	4	1
....	...	...	...	...	...

115. Một xe ôtô 5 chỗ ngồi đang chở đủ 5 người đi công tác, kể cả tài xế. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi trên xe ?

a) 6　　b) 12　　c) 5!　　d) $2A_5^3$.

116. Xét các mệnh đề sau :

(i) Sắp xếp 10 học sinh vào cùng một hàng ngang để khen thưởng trước cờ

(ii) Rút 12 quân bài ra khỏi bộ bài tây 52 lá

(iii) Xếp ba quyển sách lên cùng một kệ sách

(iv) Thiết lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau từ các chữ số 1, 2, 3

Mệnh đề nào chỉ chứa các khái niệm về hoán vị ?

a) Chỉ (i)　　　　b) Chỉ (ii)

c) Chỉ (iii) và (iv)　　　　d) Chỉ (i), (iii), (iv).

117. Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào cho ta khái niệm về chinh hợp không lặp ?

a) Xếp 12 người khách vào một bàn tròn.

b) Chọn 10 học sinh trong 32 học sinh của lớp chuyên Toán để thành lập đội tuyển thi chọn học sinh giỏi

c) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt

d) Cả a), b) và c).

118. Mệnh đề nào sau đây không mang khái niệm tổ hợp ?

a) Chia một lớp học có 48 học sinh ra làm 5 tổ, mỗi tổ gồm 12 học sinh.

b) Một tập hợp có n phần tử thì có 2^n tập con.

c) Bộ ba $\left(1\,;\,4\,;\,-\sqrt{3}\right) \in \mathbf{R}^3$

d) Khai triển $(1-x)^{2001}$ có hệ số của số hạng thứ 1000 là lớn nhất.

119. Mệnh đề nào sau đây là đúng nhất ?

a) $(m+n)! = m! + n!$

b) $(m.n)! = m!.n!$

c) $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)$

d) Cả a), b) và c) đều sai.

120. Khi xét nhị thức Newton $(a+b)^n$, phát biểu nào sau đây là sai ?

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) Tổng n hệ số của n số hạng tự do là 2

c) Hai số hạng tự do cách đều hai biên của khai triển chính tắc thì bằng nhau

d) Số các số hạng của khai triển lớn hơn số mũ của khai triển.

121. Trên đường đua có 10 con ngựa tham dự. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra một cặp nhất – nhì ?

a) 90 b) $C_{10}^1.C_9^1$ c) $A_{10}^1.A_9^1$ d) Một kết quả khác.

122. Giá trị biến tự nhiên x bằng bao nhiêu thì ta có $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$ được thoả ?

a) 5 b) 7 c) 14 d) 4.

123. Khi tồn tại $3A_n^2 = A_{2n}^2 - 42$ thì giá trị của n là :

a) 5 b) 7 c) 8 d) Một kết quả khác.

124. Một buổi dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ đều khiêu vũ giỏi. Hỏi có bao nhiêu phương án chọn khác nhau để lựa ra 3 cặp nam – nữ biểu diễn trong buổi dạ tiệc đó ?

a) 64200 b) 86400 c) 7200 d) 14800.

125. Lựa chọn nào sau đây chỉ ra số cách ghi 3 điểm A, B, C phân biệt nằm trên một đường thẳng ?

a) 2^3 b) 16 c) 6 d) 12.

126. Số hoán vị của n phần tử trong đó có hai phần tử x, y tuỳ ý không đứng cạnh nhau là :

a) $n! - 2(n-1)!$ c) $x^n y^n$

c) $2(n-1)!$ d) $n! - (xy)!$.

127. Trong một kín có sẵn 7 quả cầu trắng và 3 quả cầu đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 quả cầu trong đó có nhiều nhất 2 quả cầu đỏ ?

a) 162 b) 203 c) 168 d) 230.

128. Số giao điểm nhiều nhất của 10 đường thẳng phân biệt là :

a) 75 b) 40 c) 45 d) 60.

129. Có bao nhiêu cách chia một tập hợp có n phần tử thành 2 tập hợp con ?

a) 2^n b) $(n-2)!$ c) 2^{n-2} d) 2^{n-1}.

130. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau mà tổng số các chữ số của mỗi số đó là 12 ?

a) 120 b) 132 c) 96 d) 174.

131. Hai số nguyên dương p và q thoả p + q = a, với a là số nguyên dương cho trước. Lúc đó giá trị của $\max\left(P_p P_q\right)$ bằng bao nhiêu ?

a) $(a-2)!$ b) $(a-1)!$ c) $\left[\left(\frac{a}{2}\right)!\right]^2$ d) $2\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{a+1}{2}\right)!$.

132. Số hạng chứa x^{14} trong khai triển $\left(1-x^2\right)^{12}$ là bao nhiêu ?

a) −904 b) 729 c) −729 d) 904.

133. Mệnh đề nào sau đây là đúng nhất ?

a) $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ b) $(a-b)! = 1 \Leftrightarrow a - b = 1$

c) $a! = b! \Leftrightarrow a = b$ c) $C_8^1 = C_8^6$.

134. Một xã viên xếp 7 con trâu, 3 con bò vào chuồng ăn chiều. Lựa chọn nào sau đây không sai ?

a) 3!7! b) $C_{10}^7.C_7^7$ c) $A_{10}^3.A_7^7$ d) 10!.

135. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 nam và 3 nữ trong một lớp học có 20 nam và 24 nữ ?

a) 2.2!.3! b) $A_{20}^2 + A_{24}^2$ c) $A_{20}^2.A_{24}^3$ d) $C_{20}^2.C_{24}^3$.

136. Năm người đàn ông và bốn người đàn bà ngồi trên một ghế băng dài. Hỏi có bao nhiêu cách xếp đặt đàn ông và đàn bà ngồi không xen kẽ nhau ?

a) 5!.4! b) $C_9^4.C_9^5$ c) 2!.3!.4! d) 200.

137. Một nhóm bạn của chị Tâm có 14 người, kể cả chị tâm. Hỏi có bao nhiêu cách bầu ra một ban đại diện phải có mặt chị Tâm ?

a) $A_{14}^4 - 1$ b) $A_{13}^3 - 1$ c) $C_{13}^3 + 1$ d) C_{13}^3.

138. Số tập hợp con của tập hợp

$$A = \left\{1 ; 3 ; -1 ; \Omega ; \square ; \sqrt{3} ; \frac{11}{2} ; \lg\frac{1}{10}\right\}$$

không có mặt đồng thời số âm và Ω là :

a) 64 b) 6! c) C_8^2 d) 32.

139. Có bao nhiêu số chẵn chỉ có 2 chữ số ?

a) 45 b) 90 c) 60 d) 120.

140. Có bao nhiêu số lẻ chỉ có 3 chữ số ?

a) 150 b) 450 c) 900 d) 240.

141. Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của lục giác đều mà cạnh của tam giác không phải là cạnh của lục giác đó ?

a) 2 b) 6 c) 3 d) 4.

142. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau và khác 0, đồng thời tổng ba chữ số của các số đó là 8 ?

a) $2C_9^3$ b) 16 c) $2A_9^3$ d) 2.3!.

143. Giá trị của biểu thức $E = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$ là :

a) 15 b) 20 c) 45 d) 25.

144. Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong 5 chữ số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nó ?

a) 124 b) 130 c) C_9^5 d) A_9^5.

145. Giá trị của hệ số đứng trước x^3 trong khai triển : $(x+1)^5 + (x-2)^7$ là bao nhiêu ?

a) 570 b) -400 c) 400 d) 175.

146. Giá trị của tổng $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5$ là :

a) 81 b) 2^5 c) 5 d) 3^5.

147. Trong cuộc thi đàn Organ tổ chức cho lứa tuổi thiếu nhi, có 18 thiếu nhi cả nước được vào vòng chung kết. Để tìm một đệ nhất danh cầm, một đệ nhị danh cầm và một đệ tam danh cầm người ta bắt gặp một lập luận sau trong giấy nháp làm công tác chuẩn bị qua 4 giai đoạn sau :

(i) Có 18 cách chọn ra một đệ nhất danh cầm

(ii) Liền đó còn 17 danh cầm

(iii) Chọn 2 giải đệ nhị và đệ tam danh cầm thì có C_{17}^2 cách chọn

(iv) Có tất cả $18.C_{17}^2$ cách chọn cho cả bài toán.

Lập luận trên bị sai ở ngay giai đoạn nào ?

a) (i) b) (iii) c) (ii) d) (i) và (ii) không sai.

148. Trong một buổi gặp gỡ giao lưu của 10 cựu chiến binh xe tăng, mọi người đều bắt tay nhau. Có bao nhiêu cái bắt tay như thế trong lúc chia tay ra về sau cuộc giao lưu ?

a) 45 b) 90 c) 60 d) 80.

149. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số tận cùng bằng chữ số 6 và các số đó chia hết cho 3 ?

a) 650 b) $(6!)^2$ c) 900 d) 3000

150. Năm người bạn đi xem phim đã chơi trò đổi chỗ trên chính các ghế của mình. Hỏi có bao nhiêu cách đổi chỗ như thế ?

a) 5^2 b) $C_5^2.C_5^1$ c) 120 d) 160.

ĐÁP SỐ

1b	2d	3c	4a	5b	6c	7d	8c	9a	10b
11c	12c	13a	14b	15d	16b	17c	18a	19d	20b
21b	22d	23a	24b	25c	26c	27d	28c	29d	30d
31d	32c	33d	34d	35a	36c	37b	38b	39d	40d
41d	42b	43b	44a	45d	46a	47d	48a	49c	50b
51d	52b	53d	54c	55d	56b	57d	58d	59d	60a
61d	62d	63c	64a	65b	66c	67a	68d	69b	70d
71d	72d	73d	74a	75d	76a	77d	78b	79c	80a
81b	82c	83d	84d	85c	86d	87b	88a	89d	90d
91b	92d	93a	94d	95a	96a	97d	98c	99d	100b
101c	102d	103a	104b	105d	106d	107b	108c	109a	110d
111b	112c	113d	114d	115a	116d	117d	118c	119d	120b
121d	122a	123a	124c	125a	126a	127b	128c	129d	130d
131b	132b	133a	134d	135d	135c	137d	138d	139a	140b
141a	142d	143b	144c	145a	146b	147b	148a	149d	150c

III. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương 1.

GIỚI HẠN HÀM SỐ – HÀM SỐ LIÊN TỤC

1.1 a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{3}$

1.2 a) $-\frac{1}{2}$ nếu $a > 0$; ∞ nếu $a < 0$, b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{m}{3}$

1.3 a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

1.4 a) 1 b) $\frac{1}{4}$ d) 2

1.5 a) 2 b) $6\sqrt{2}$ c) $2\cos x$

1.6 a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1.7 a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$

1.8 a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$

1.9 a) -1 b) $\frac{1}{20}$ c) 3

1.10 a) $\frac{3}{4}$ b) 2 c) $-a$.

1.11 a) -1 b) $-\frac{1}{5}$ c) 3 d) $\frac{3}{2}$.

1.12 a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) -2 d) $-\frac{5}{2}$.

1.13 Hàm số không liên tục tại các điểm $x = 2$ và $x = -2$.

1.14 Hàm số không liên tục tại các điểm $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

1.15 Hàm số liên tục trên tập số thực **R**.

1.16 Hàm số liên tục tại $x = 0$ khi $a = -1$ hoặc $a = 2$.

Chương 2.

ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

2.1 a) $y' = \dfrac{2\sin^2 x}{\sqrt{4x - \sin 2x}}$; b) $y' = 4\sin^3 x \cos x$;

c) $y' = \dfrac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$; d) $y' = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

e) $y' = \pm\left(\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}\right)$.

2.2 a) $y' = \dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$; b) $y' = \dfrac{\cot^2 \dfrac{x}{3}}{\sin^2 \dfrac{x}{3}}$; c) $y' = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2.3 a) $y' = \dfrac{4\cos^2 2x}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$; b) $y' = \dfrac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $y' = -\sin 4x$; d) $y' = \dfrac{-2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$;

e) $y' = 3x^2 \sin 2x^3$; g) $y' = \dfrac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$.

2.4 Bằng quy nạp theo n chứng minh rằng với $n \geq 2$ ta có

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n}(2n+x)(1+x).$$

2.5 Sử dụng phân tích

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

2.6 a) $y_{max} = 4$ tại $x = 2$;

b) $y_{min} = -4$ tại $x = -1$;

c) $y_{min} = 0$ tại $x = 0$; $y_{max} = \dfrac{4}{3}$ tại $x = -2$;

d) $y_{min} = -4$ tại $x = -1$; $y_{max} = 0$ tại $x = -3$.

e) $y_{max} = 0$ tại $x = 0$; $y_{min} = 8$ tại $x = 4$.

f) $y_{min} = -6,75$ tại $x = -3$.

2.7 Sử dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$ và $S = \pi R l$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $t - t^3 \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ với $t = \dfrac{R}{l}$, $0 < t < 1$.

Xét giá trị lớn nhất của $f(t) = t - t^3$ $(0 < t < 1)$.

2.8 a) Dùng đạo hàm $g'(x)$ xét sự biến thiên của g(x) trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Sử dụng câu a) để chứng minh $f(x) > g(x)$ với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.9 Đặt $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ thì $y_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ suy ra $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ là đáp số cần tìm.

1.10 Đặt $y = x^4 + 4mx + m$ và lí luận :

$$y > 0 \Leftrightarrow y_{min} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{27}.$$

2.11 Đặt $y = m\ln x - m - 2x$ và lí luận :

$$y \leq 0 \Leftrightarrow y_{max} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2e^2.$$

2.12 $-1 \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.13 $a = -\frac{19}{4}$.

2.14 $0 < a < 2$.

2.15 Vô nghiệm.

2.16 Đặt $y_1 = (\cos x + \sin x)^3$, $y_2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

y_1 nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$; y_2 nhỏ nhất khi $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Từ đó suy ra y nhỏ nhất bằng $4 - 2\sqrt{2}$.

Chương 3.

TÍCH PHÂN

3.1 a) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$; b) $-\cos(e^x) + C$; c) $\ln(e^x + 2) + C$.

3.2 a) $2e^{\sqrt{x}} + C$; b) $e^{-\cos x} + C$; c) $\ln\left(\frac{3e^x}{3e^x + 1}\right) + C$.

3.3 a) Với $x \in [0 ; 1]$ thì $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \leq 1$.

b) Với $x \in [1 ; 2]$ thì $\frac{2}{5} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

3.4 Đặt $a = \frac{x}{x+1}$, $b = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}$ thì :

$$\left|\frac{x\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{2x+1}}{x+1}\right| = |a\sin\alpha + b\cos\alpha|$$

$$\leq \sqrt{a^2+b^2} = 1, \text{ với } x \in [0\ ;\ 1]$$

Do đó :

$$-1 \leq \frac{x\sin\alpha + \cos\alpha.\sqrt{2x+1}}{x+1} \leq 1.$$

3.5 $|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

3.6 a) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

3.7 Chứng minh :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \text{ với } x \in \left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right].$$

3.8 Dùng bất đẳng thức $[tf(x) - g(x)]^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$ rồi qua dấu tích phân.

3.9 a) $nI_n = (n-1)I_{n-2}$;

b) $nI_n.I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = 1$. Dùng (I_n) là dãy giảm để suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$.

3.10 a) $I = \frac{\pi}{4}$ (đổi biến $t = \sin^2 x$).

b) $J = \frac{\pi}{4}$ (đổi biến $t = \cos^2 x$).

c) Dùng câu a) và b).

3.11 a) $I = \frac{1}{3}$ b) $J = \frac{2}{15}$.

3.12 a) $I = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$; b) $J = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$; c) $K = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$.

3.13 $V = \frac{153\pi}{5}$ (đơn vị thể tích)

3.14 $S = \frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

3.15 a) $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$;   b) $\frac{1}{5}\ln\frac{12}{7}$.

3.16 a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$;

b) $\frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{3}{4}\sin 4x + \frac{3}{4}\sin 2x\right) + C$.

3.17 0.

3.18 Tính I + J và I – J rồi suy ra I, J, với $I = J = \frac{\pi}{8}$.

3.19 Đổi biến số $t = \pi - x$, tính được $I = \frac{\pi}{3}$.

3.20 $S = 9 - 4\ln 4$ (đơn vị diện tích).

3.21 a) $I = 0$ b) $J = \frac{4}{3}$.

3.22 $S = \frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích).

3.23 a) $S = 14$ (đvdt);   b) $V = 32\pi$ (đvdt).

3.24 a) $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$;   b) $I = \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5}\ln\frac{3}{4}$.

3.25 $S = 27\ln 3$ (đvdt).

3.26 Đổi biến số $t = \sqrt{x}$ rồi dùng tích phân từng phần, được

$$I = -2x\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C.$$

3.27 $I = x + \frac{1}{6}\ln\left(x^6 + 1\right) + \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$.

3.28 $I = \frac{1}{15}$; $J = \frac{36}{\sqrt{10}\ln 10}$.

3.29 a) $S = \frac{5\sqrt{2} - 6}{3}$ (đvdt);

Chương 4.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

4.1 a) Nếu ba chữ số đứng liền nhau theo thứ tự đó thì coi như đó là một vị trí, còn lại hai vị trí nữa dành cho 2 chữ số 2 và 4. Vậy số các số thoả mãn điều kiện này là 3! = 6 số.

b) Khi đổi vị trí của 1, 3, 5 ta được 3! = 6 hoán vị của 3 số. Vậy số các số thoả mãn điều kiện này là 6.6 = 36 số.

c) Có C_5^2 cặp vị trí trong 5 chữ số dành cho cặp (1,4) với 1 luôn đứng trước 4. Còn lại có 3! = 6 số ứng với các vị trí khác nhau dành cho 2, 3 và 5.

Vậy đáp số là $6.C_5^2 = 60$ số.

d) Có C_5^3 bộ 3 vị trí dành cho các chữ số 1, 3, 5 mà 1 đứng trước 3 và 3 đứng trước 5. Còn lại có 2! = 4 số ứng với các vị trí khác nhau dành cho 2 và 4.

Vậy đáp số là : $4.C_5^3 = 40$ số.

4.2 a) Tất cả có C_{22}^5 cách lập tổ công tác có 5 người. Trong đó số tổ toàn nam cả là C_{10}^5. Vậy số cách lập các tổ công tác có ít nhất 1 nữ là : $C_{22}^5 - C_{10}^5 = 26082$.

b) Điều kiện này có nghĩa là trong tổ toàn nữ hoặc chỉ có 1 nam. Trường hợp đầu có tất cả C_{12}^5 cách thành lập, trường hợp sau có $C_{12}^4.C_{10}^1$ cách.

Đáp số là : $C_{12}^5 + C_{12}^4C_{10}^1 = 5742$.

4.3 a) C_8^3.

b) 6. Số 0 cuối cùng chỉ có thể ở các vị trí 3, 4, 5, 6, 7, 8.

c) Để làm câu này, ta tính số dãy (*) mà không có số 0 nào đứng kề nhau : đó là các dãy có 8 số 1, dãy có 7 số 1, dãy có 6 số 1 và hai số 0 đứng cách nhau, ...

– Có 1 dãy có 8 số 1.

– Có 8 dãy có 7 số 1.

– Có C_7^2 dãy có 6 số 1 và hai số 0 đứng không liền nhau.

– Có C_6^3 dãy có 5 số 1 và 3 số 0 mà không có 2 số 0 nào kề nhau.

– Có C_5^4 dãy có 4 số 1 và 4 số 0 mà không có 2 số 0 nào kề nhau.

Nếu một dãy có ít hơn 4 số 1 thì phải có 2 số 0 kề nhau. Vậy số dãy (*) mà không có hai số 0 kề nhau là :

$$1 + 8 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4.$$

Vì tất cả có 2^8 dãy (*) nên đáp số bài toán là :

$$2^8 - \left(1 + 8 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4\right).$$

4.4 a) C_{35}^5; b) $C_{40}^5 - C_{35}^5$.

4.5 a) Nếu cách chọn 8 viên bi được thể hiện bằng 1 dãy chẳng hạn :

Đỏ	Vàng	Xanh
xxx	x	xxxx

gồm 8 dấu x và hai dấu | (tổng số 10 dấu). Dãy lấy làm ví dụ có nghĩa là 3 bi đỏ, 1 bi vàng và 4 bi xanh. Số cách chọn khác nhau là số các dãy khác nhau : đó chính là số vị trí khác nhau của hai dấu gạch đứng | trong 10 dấu đó. Vậy số cách chọn khác nhau là :

$$C_{10}^2 = \frac{10.9}{2} = 45.$$

b) Nếu mỗi màu có ít nhất 1 viên bi thì gạch đứng chỉ ở vị trí thứ hai đến vị trí thứ 9 và hai gạch đứng không kề nhau. Số cách đó là : $C_7^2 = 21$.

4.6 Mỗi dãy con 10 được biểu thị bằng 1 dấu * thì còn lại 4 vị trí để đặt các số 0 và 1 ở trước hai dấu * đó, hoặc giữa hai dấu * hoặc sau hai dấu *, chẳng hạn :

$$0\ 1\ \overset{*}{\overbrace{1\ 0}}\ 0\ \overset{*}{\overbrace{1\ 0}}\ 1$$

Chú ý rằng trong mỗi nhóm các số 0 và 1 còn lại này nếu đã có số 1 thì bên phải của nó không thể đặt số 0 (vì chỉ có đúng 2 dãy con 10 trong dãy đó) mà phải đặt số 1. Như vậy mỗi dãy đã cho phải có dạng :

$$0^m \mid 1^n * 0^p \mid 1^q * 0^r \mid 1^s \qquad (1)$$

với m + n + p + q + r + s = 4, m, n, p, q, r, s nguyên ≥ 0. Dấu gạch đứng | ngăn cách 0 và 1 trong mỗi nhóm (có tất cả 3 dấu |). Độ dài của dãy (1) (gồm các số 0, 1 và các dấu | và *) là 9. Các dãy khác nhau tuỳ vào vị trí sắp xếp của 5 kí tự dấu : | * | * | trong dãy độ dài 9 đó. Vậy số các dãy khác nhau là : $C_9^5 = 126$.

4.7 a) Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \quad (1)$$

tương ứng với cách chọn x_i viên bi loại i (i = 1, 2, 3, 4) trong 19 viên bi, nên tương tự cách giải Câu a) Bài 4.5 ta có số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) là : $C_{22}^3 = 1540$.

b) Mỗi nghiệm nguyên cua phương trình (1) thoả mãn điều kiện $x_1 > 0, x_2 > 1, x_3 > 2, x_4 \geq 0$ tương ứng với cách chọn x_i viên bi loại i (i = 1, 2, 3, 4) sao cho có ít nhất 1 viên loại 1, có ít nhất 2 viên loại 2, có ít nhất 3 viên loại 3.

Đầu tiên chọn 1 viên loại 1, chọn 2 viên loại 2 và chọn 3 viên loại 3 (tất cả là 6 viên) thì còn lại 13 viên. Làm tương tự câu a) cho 13 viên này, ta được số cách chọn (cũng là số nghiệm thoả mãn điều kiện) là : $C_{16}^3 = 560$.

4.8 $C_{12}^2 = 66$.

Chương 5.

XÁC SUẤT

5.1 – Số phần tử của không gian mẫu là $C_7^3 = 35$.

– Số phần tử của biến cố A "có đúng hai viên màu đỏ trong 3 viên lấy ra" là $C_4^2 . C_3^1 = 18$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{18}{35}$.

5.2 – Số phần tử của không gian mẫu là $C_{50}^{12} = \frac{50!}{12!\,38!}$.

– Gọi A là biến cố "trong 12 trái lấy ra có nhiều nhất 2 trái không ngọt", B_1 là biến cố "cả 12 trái lấy ra đều ngọt, B_2 là biến cố "trong 12 trái lấy ra có 1 trái không ngọt" và B_3 là biến cố trong 12 trái lấy ra có 2 trái không ngọt".

Thế thì B_1, B_2, B_3 là ba biến cố xung khắc và

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

Do đó :

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

Ta có :

$$P(B_1) = \frac{C_{30}^{12}}{C_{50}^{12}},\ P(B_2) = \frac{C_{30}^{11}.C_{20}^{1}}{C_{50}^{12}},\ P(B_3) = \frac{C_{30}^{10}.C_{20}^{2}}{C_{50}^{12}}.$$

Vậy :

$$P(A) = \frac{C_{30}^{12} + C_{30}^{11}.C_{20}^{1} + C_{30}^{10}.C_{20}^{2}}{C_{50}^{12}}.$$

5.3 Gọi A là biến cố "trúng số độc đắc". Mỗi xêri có 100 ngàn vé nên mỗi vé có 5 chữ số từ 00000 đến 99999, mỗi chữ số lấy từ 0 đến 9.

Vì cả chữ và 5 chữ số được quay độc lập, nên các biến cố C "trúng chữ số thứ i của vé số độc đắc" và các biến cố S_i "trúng chữ số i của vé số độc đắc "đều là các biến cố độc lập. Do đó :

$$P(A) = P(C).P(S_1).P(S_2).P(S_3).P(S_4).P(S_5)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{5.10^5} = \frac{2}{10^6} = 2 \text{ phần triệu.}$$

5.4 – Số phần tử của không gian mẫu là C_{10}^3.

1) Biến cố A "cả 3 bóng đều tốt, có C_7^3 phần tử.

Vậy : $P(A) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7!}{3!\,4!}\cdot\frac{3!\,7!}{10!} = \frac{7}{24}$

2) Gọi B là biến cố "có ít nhất 1 bóng tốt" thì biến cố bù B' là "cả 3 bóng đều xấu".

B' có $C_3^3 = 1$ phần tử, nên $P(B') = \frac{1}{C_{10}^3}$.

Vậy $P(B) = 1 - \frac{1}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120}$.

5.5 1) $P(A) = \frac{1}{4}$. b) $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$. c) $P(A/B) = \frac{3}{8}$, $P(A'/B) = \frac{5}{8}$.

5.6 Gọi A_1 là biến cố "bia bị người thứ nhất bắn trúng" A_2 là biến cố "bia bị người thứ hai bắn trúng", B là biến cố "bia bị trúng đạn", C là biến cố "bia bị trúng 2 viên đạn". Ta có $B = A_1 \cup A_2$, A_1 và A_2 không xung khắc nên

$P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, trong đó $A_1 \cap A_2 = C$. Vì A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập nên :

$$P(C) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$$

Vậy : P(C) = 0,8.0,7 = 0,56.

Đáp số :

1) P(A) = 0,8 + 0,7 – 0,56 = 0,94 ;

2) P(C) = 0,56 ;

3) P(A') = 1 – P(A) = 0,06.

5.7 Không gian mẫu có C_{15}^4 phần tử.

1) Gọi A là biến cố "lấy được ít nhất 1 viên bi đỏ" thì biến cố bù A' là "lấy được 4 viên bi xanh".

$$P(A') = \frac{C_5^4}{C_{15}^4}.$$

Do đó :

$$P(A) = 1 - \frac{C_5^4}{C_{15}^4} = 1 - \frac{1}{273} = \frac{272}{273}.$$

2) Gọi B là biến cố "lấy được 1 hoặc 2 viên bi xanh", B_1 là biến cố "lấy được 1 viên bi xanh" B_2 là biến cố "lấy được 2 viên bi xanh" thì $B = B_1 \cup B_2$, B_1 và B_2 là hai biến cố độc lập.

$$P(B_1) = \frac{C_{10}^3.C_5^1}{C_{15}^4}, \; P(B_2) = \frac{C_{10}^2.C_5^2}{C_{15}^4}$$

Vậy : $P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{10}{13}$.

5.8 Trước hết tìm số phần tử của không gian mẫu. Mỗi cách chọn ngẫu nhiên 8 viên bi ứng với 1 dãy

Đỏ	Trắng	Xanh	
(xx	| x	| xxx)	(1)

có 2 dấu gạch đứng | ngăn cách số bi đỏ, trắng, xanh và các dấu x ứng với 1 viên bi mỗi loại được chọn. Các dãy (1) khác nhau ở vị trí của hai gạch |

trong 10 dấu x và |, do đó số cách chọn là C_{10}^2. Gọi A là biến cố "trong các viên bi lấy ra không có bi đỏ". Thế thì A gồm các dãy (1) mà phần trước gạch đứng thứ nhất không có dấu x nào, chẳng hạn :

| xxx | xxxxx (2)

Số dãy (2) khác nhau là số dãy (2) mà dấu | thứ hai nằm ở các vị trí khác nhau trong 9 dấu còn lại. Vậy số phần tử của A là C_9^1. Do đó : $P(A) = \frac{C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHẦN III)

Bài 1.

Câu 1.

a) Kí hiệu : $f(x) = \cos x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Đặt : t = –x thì f(x) = –f(t), do đó :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -f(t)(-dt) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = -I \Rightarrow I = 0.$$

b) Ta có : $x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$, do đó :

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx^3}{(x^3)^2+1} = \arctan x\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\arctan x^3\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

c) Đặt $t = \sin x$, ta có :

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^4(1-t^2)}$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{26}{9\sqrt{3}} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)^6 - \frac{1}{2}\ln 3.$$

Câu 2.

a) Đặt $U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

Nếu gọi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ thì $U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$, do đó :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^1 f(x)dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{2x+1}{x+1}} = e^2.$

Câu 3. Ta thấy y(x) liên tục tại x = 0 và với $x \geq 0$ thì $y'(x) = e^x$; với $x < 0$ thì $y'(x) = 2x + a$. Vậy $y'(x)$ tồn tại tại x = 0 khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 0^+} e^x = \lim_{x\to 0^-}(2x + a) \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 4. Với mọi $x \in (0 ; 1)$ ta có :

$$\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{1+x^{10}} > 1 \Rightarrow \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < x^{25}$$

Lấy tích phân từ 0 tới 1 cả ba vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.

Câu 1. Đặt : $t = \sin x - \cos x$ thì $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

Vậy : $I = \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Câu 2. Xem Câu 1b) Bài 1 : $J = \frac{\pi}{3}$.

Câu 3. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ ta có :

$$K = \int_0^1\left(-1 + \frac{1}{(t+2)^2} + \frac{2}{t+2} + \frac{-2t+3}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} + \ln\frac{9}{8}.$$

Câu 4. Đặt : $t = \pi - x$ thì ta có : $L = \pi\int_0^{\pi}\cos^4 x\sin^3 x dx - L$

Suy ra : $L = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos^4 x\sin^3 x dx.$

Đổi biến số $u = \cos x$ thì :

$$L = \frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1} u^4\left(u^2 - 1\right)du = \frac{2\pi}{35}.$$

Bài 3.

Câu 1. Đặt : $y = \sqrt[4]{2x-1},\ t = \sqrt[5]{x-2}$ thì :

$$x = \frac{y^4+1}{2} = t^5 + 2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x+1} + \sqrt[5]{x-2} + 1}{x-1}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{2(y-1)}{y^4-1} + \lim_{t\to -1}\frac{t+1}{t^5+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

Câu 2. Biến đổi $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{3(\sin 4x - \sin 2x) - \sin 6x}$

$$= \frac{\sin^3 x}{2\cos 3x(3\sin x - \sin 3x)} = \frac{1}{8\cos 3x}$$

Do đó :

$$\int f(x)dx = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{\cos 3x} = \frac{1}{24}\int\frac{dt}{1-t^2} \text{ (với } t = \sin 3x)$$

$$= \frac{1}{48}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{48}\ln\left(\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right) + C$$

Câu 3. Tổng số cách chọn 3 trong số 50 học sinh là : C_{50}^3 cách chọn. Trong 3 học sinh được chọn thì có 1 cặp sinh đôi hoặc không có cặp sinh đôi nào. Số cách chọn 3 học sinh có 1 cặp sinh đôi là $C_4^1.C_{48}^1$. Vậy số cách chọn 3 học sinh không có cặp sinh đôi nào là :

$$C_{50}^3 - C_4^1.C_{48}^1 = 50.49.8 - 4.48 = 19408.$$

Bài 4.

Câu 1. Theo giả thiết hàm số $g(x) = f(x) - \sin x$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ và có $g(0) = f(0) > 0$. Mặt khác :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < 1 - 1 = 0$$

Vậy phải có $c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ để g(c) < 0. Do đó phương trình g(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 2. Ta có :

$$\int_{\ln x}^{2+\ln x} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_{\ln x}^{2+\ln x} = \sqrt{2+\ln x} - \sqrt{\ln x} \text{ (điều kiện } x > 1\text{)};$$

$$\int_{e^{-\frac{3}{4}}}^{x} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{e^{-\frac{3}{4}}}^{x} = \ln|x| + \frac{3}{4} = \ln x + \frac{3}{4} \text{ (vì } x > 1\text{)}.$$

Đặt $t = \ln x$ $(t > 0)$, bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2+t} - \sqrt{t} < t + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+t} + \sqrt{t}} - t < \frac{3}{4}$.

Hàm $f(t) = \frac{2}{\sqrt{2+t} + \sqrt{t}} - t$ có $f'(t) < 0$ với $t > 0$ và $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ nên bất phương trình $f(t) < \frac{3}{4}$ tương đương với $t > \frac{1}{4}$. Suy ra $x > e^{\frac{1}{4}}$.

Bài 5.

Câu 1.

a) f(x) liên tục trên $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

$|f(x)| = \left|x\cos\frac{1}{x^2}\right| \le |x|$, do đó $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ nên f(x) liên tục tại x = 0.

b) Khi $x \neq 0$ ta có $f'(x) = \cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. Tại x = 0, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{1}{(\Delta x)^2}$, giới hạn này không tồn tại.

$$\left(\cos\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{2k\pi}}\right)^2} \to 1 \text{ khi } k \to \infty,\ \cos\frac{1}{\left[\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}}\right]^2} \to 0 k \to \infty\right).$$

Câu 2. $S = \int_1^e \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = 2 - \sqrt{2}$ (đvdt).

Câu 3. Có tất cả C_{15}^4 cách chọn 4 viên từ hộp có 15 viên bi. Xét những trường hợp mà 4 viên được chọn đủ cả 3 màu :

a) 2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng : có $C_4^2C_5^1C_6^1$ cách chọn.

b) 1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng : có $C_4^1C_5^2C_6^1$ cách chọn.

c) 1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng : có $C_4^1C_5^1C_6^2$ cách chọn.

Vậy số cách chọn để không có đủ cả 3 màu là :

$$C_{15}^4 - \left(C_4^2C_5^1C_6^1 + C_4^1C_5^2C_6^1 + C_4^1C_5^1C_6^2\right) = 1365 - 720 = 645.$$

Bài 6.

Câu 1. $I = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{3}$; $J = \frac{1}{5} \ln \frac{64}{33}$.

Câu 2.

$$S = \int_{-3}^{0} \left[-x - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) \right] dx + \int_{0}^{1} \left[x - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) \right] dx = \frac{23}{3} \text{ (đvdt).}$$

Câu 3. Áp dụng công thức $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$ liên tiếp, từ vế phải ta suy ra vế trái.

Bài 7.

Câu 1.

a) Biến đổi $g(x) = \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 4x - \cos 8x - \cos 2x)$, ta thấy $g(x)$ có họ nguyên hàm là :

$$G(x) + C = \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{32}\sin 8x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

b) Đổi biến số t = –x. Vì g là hàm chẵn nên g(–t) = g(t) và ta có :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-g(-t)dt}{e^{-t}+1} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^t g(t)dt}{e^t+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t g(t)dt}{e^t+1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x g(x)dt}{e^x+1}$$

Do đó : $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^x g(x)}{e^x+1} + \frac{g(x)}{e^x+1} \right] dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = G(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow I = 0.$$

Câu 2. $A = -4, B = 2 \Rightarrow J = 2\ln 2 - 2.$

Câu 3. Khai triển nhị thức Niutơn :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Đạo hàm hai vế :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \ldots + nx^{n-1}C_n^n.$$

Cho $x = -1$ được :

$$0 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n \Rightarrow S = 0$$

Bài 8.

Câu 1. Đổi biến số $t = \frac{\pi}{2} - x$ ta được :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Câu 2. Theo câu 1. Ta có I = J và :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{3x} + \sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x\cos x)dx = \frac{\pi - 1}{2}$$

Vậy : $I = J = \frac{\pi - 1}{4}.$

Câu 3. Đáp số :

a) Có 10! cách sắp xếp học sinh ngồi tuỳ ý.

b) Có 2(5)! cách sắp xếp nam ngồi 1 bàn, nữ ngồi 1 bản.

Bài 9.

1. $I = \arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

Để tính J, đổi biến số $x = \tan t, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, được :

$$J = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right].$$

Câu 2. Xem Ví dụ 1, Chương 4.

Câu 3. Có C_8^3 cách chọn 3 em biết tiếng Anh, C_7^4 cách chọn 4 em biết tiếng Pháp, C_5^2 cách chọn 2 em biết tiếng Đức. Vậy đáp số là : $C_8^3.C_7^4.C_5^2 = 19600$.

Bài 10.

Câu 1.

a) Đặt : $t = 2 + \ln x$. Đáp số : $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

b) Đặt : $t = \sqrt{x}$. Đáp số : 2π.

Câu 2. Ta có :

$$\left(x^3 + xy\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{3k}(xy)^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{2k+15} y^{15-k}.$$

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ ứng với k = 5.

Đáp số : $C_{15}^5 = 3003$.

Câu 3. Áp dụng công thức $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Câu 4.

a) Có 10^5 chữ lập được có 5 chữ cái.

b) Có $A_{10}^5 = 20240$ chữ lập được với 5 chữ cái khác nhau.

Bài 11.

Câu 1. Nếu p = q thì I = π ; Nếu p ≠ q thì I = 0.

Câu 2. Chọn $x_1 \in [0 ; 2\pi]$ sao cho $\cos x_1 \neq 0$. Theo giả thiết :

$$a_1 \cos x_1 + a_2 \cos 2x_1 + \ldots + a_n \cos xn_1 - 0$$

Suy ra :

$$a_1 \cos^2 x_1 + a_2 \cos x_1 \cos 2x_1 + \ldots + a_n \cos x_1 \cos nx_1 = 0.$$

Lấy tích phân hai vế và theo Câu 1. Ta được :

$$a_1\pi = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Tương tự, chọn $x_2 \in [0 ; 2\pi]$ sao cho $\cos 2x_2 \neq 0$ và làm tương tự ta được $a_2 = 0$.

Đáp số : $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Câu 3.

a) Các tập con không chứa 1 và 2 là tập con của tập B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}. Số tập con này là 2^6. Thêm số 1 vào mỗi tập con này ta được các tập con X chứa 1 và không chứa 2. Vậy đáp số là $2^6 = 64$.

b) Chữ số hàng đơn vị của số chẵn lấy trong các số 2, 4, 6, 8. Vậy có $4.A_7^4$ số chẵn có 5 chữ số khác nhau. Trong các số chẵn này, các số chẵn bắt đầu bởi 123 có tất cả 12 số (tận cùng bởi 4, 6, 8). Vậy còn lại :

$$4A_7^4 - 12 = 826 \text{ số.}$$

Bài 12.

Câu 1. $S = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{3}$ (đvdt)

Câu 2. $\dfrac{(2\ln 2 - 1)\pi}{3}$ (đvdt).

Câu 3.

a) Năm chữ số 1 xếp kề nhau chiếm 1 vị trí, 4 vị trí còn lại dành cho các số 2, 3, 4, 5. Vậy ta có 1 hoán vị của 5. Do đó số các số thoả mãn điều kiện này là :

$$5! = 120 \text{ số.}$$

b) Nếu 9 chữ số khác nhau ta có 9! hoán vị của 9 số. Vì trong đó 5 số 1 trùng nhau, nên phải chia cho 5!, nghĩa là được một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Đáp số : $\dfrac{9!}{5!} = 3024$ số.

Bài 13.

Câu 1. Đặt $= \dfrac{1}{x}$ thì : $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_{\tan a}^{e} \frac{xdx}{1+x^2}$

Cộng lại được :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 1.$$

Câu 2.

a) Có 4 khả năng sắp 4 khách lên 3 toa tàu :

– Một toa tàu có 4 khách : (4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4). Có 3 phương án, mỗi phương án có 1 cách sắp, suy ra có 3 cách sắp.

– Một toa có 3 khách, 1 toa có 1 khách : (3, 1, 0), (3, 0, 1), (1, 3, 0), (1, 0, 3), (0, 3, 1), (0, 1, 3). Có 6 phương án, mỗi phương án ứng với C_4^3 cách sắp, suy ra có $6.C_4^3$ cách sắp.

– Một toa có 2 khách, một toa có 2 khách nữa : (2, 2, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 2). Có 3 phương án, mỗi phương án ứng với C_4^2 cách sắp, suy ra có $3C_4^2$ cách sắp.

– Một toa có 2 khách, hai toa kia mỗi toa có 1 khách hoán vị lẫn nhau : (2, 1a, 1b), (2, 1b, 1a), (1a, 2, 1b), (1b, 2, 1a), (1a, 1b, 2), (1b, 1a, 2). Có 6 phương án, mỗi phương án có C_4^2 cách sắp, suy ra có $6C_4^2$ cách sắp.

Vậy tất cả có :

$$3 + 6C_4^3 + 3C_4^2 + 6C_4^2 = 3 + 6.4 + 3.6 + 6.6 = 81$$

cách sắp 4 hành khách lên 3 toa tàu.

b) Đây là khả năng thứ hai ở câu a). Có 6.4 = 24 cách sắp để một toa có 3 khách.

Bài 14.

Câu 1. $I = \frac{e-2}{2}$ (đặt $t = \sin^2 x$)

Câu 2. Khai triển $(1+x)^n$ rồi lấy tích phân hai vế.

Bài 15.

Câu 1. $I = \frac{1}{10}\left(28 - 3\sqrt[3]{4}\right)$ (đặt $t = \sqrt[3]{3x+2}$).

Câu 2. Có A_{10}^2 cách chọn hai chữ số cuối khác nhau. Vậy xác suất để quay 1 lần đúng số là $\frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{9}$.

Bài 16.

Câu 1. Sắp cho nữ ngồi trước, cứ 1 ghế đã sắp thì dành 1 ghế trống cho nam. Có 2.n! cách sắp cho nữ, mỗi cách sắp cho nữ ứng với n! cách sắp cho nam. Vậy tất cả có $2(n!)^2$ cách sắp.

Câu 2. Không gian mẫu gồm có 9.10.10 = 900 phần tử (chữ số đầu tiên phải khác 0). Số được chọn là $\overline{a_1a_2a_3}$, với $a_3 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $a_1 \neq 0, a_1 \neq a_3$ và $a_2 \neq a_1, a_2 \neq a_3$. Nếu đã chọn $a_3 = 0$ thì có 9 cách chọn a_1, và sau đó còn 8 cách chọn a_2. Nếu chọn $a_2 \in \{2, 4, 6, 8\}$ thì còn 8 cách chọn a_1 và sau đó còn 8 cách chọn a_2. Vậy số cách chọn là : 9.8 + 4.8.8 = 328.

Vậy xác suất là $\dfrac{328}{900} = \dfrac{82}{225}$.

Bài 17.

Câu 1. Không gian mẫu là C_{100}^3. Người đó trúng thưởng 3000đ nghĩa là cả 3 vé đều trúng loại 1000đ, vậy số phần tử của biến cố này là C_{10}^3. Do đó xác suất là

$$\frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} = \frac{4}{5390}.$$

Câu 2. Gọi A là biến cố "trúng thưởng ít nhất 3000đ" thì biến cố bù A' là "trúng thưởng nhiều nhất 2000đ". Biến cố A' bao gồm :

– Không trúng thưởng : số phần tử C_{84}^3.

– Trúng thưởng 1000đ : số phần tử $C_{84}^2.C_{10}^1$.

– Trúng thưởng 2000đ : số phần tử $C_{84}^1.C_{10}^2$.

Vậy :

$$P(A') = \frac{C_{84}^3 + 10C_{84}^2 + 45C_{84}^1}{C_{100}^3} = \frac{4783}{5775}$$

Suy ra :

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{992}{5775}.$$

Bài 18. Gọi A là biến cố : "tích hai số ghi trên thẻ là số chẵn" thì biến cố bù A' là "tích hai số ghi trên thẻ là số lẻ". Vậy A' gồm các tập con chứa 2 phần tử của tập :

$$\{1, 3, 5, 7, 9\},$$

do đó A' gồm C_5^2 phần tử.

Vậy $P(A') = \frac{C_5^2}{C_9^2}$ và $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

Bài 19.

Câu 1. Số cách chọn 2 viên bi xanh 1 viên bi đỏ là $C_7^2C_3^1$. Không gian mẫu có C_{10}^3 phần tử. Vậy xác suất phải tìm là : $\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$.

Câu 2. Gọi A là biến cố "lấy được viên bi xanh ở lần thứ nhất" và B là biến cố "lấy được viên bi đỏ ở lần thứ hai". Ta có $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B/A) = \frac{2}{9}$.

Vậy :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{14}{90} = \frac{7}{45}.$$

Đáp số : Xác suất là $\frac{7}{45}$.

Bài 20.

Câu 1. Số cách chọn là $C_8^3 = 56$.

Câu 2. Có 7 cách chọn để tổng trọng lượng ba quả cân không vượt quá 9kg, đó là $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$.

Vậy xác suất là $\frac{7}{56} = \frac{1}{8}$.

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2008)

NĂM 2005

ĐỀ THI KHỐI A

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $t = \sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{3} \\ dt = -\dfrac{3\sin x}{2\sqrt{1 + 3\cos x}} dx. \end{cases}$

Với $x = 0$ thì $t = 2$; với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Ta có :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = \int_1^2 \left(2 \cdot \frac{t^2 - 1}{3} + 1\right)\left(-\frac{2}{3}\right) dt$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{9}\left[\left(\frac{16}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} + 1\right)\right] = \frac{34}{27}.$$

***Câu IV.* 2.** Tìm số nguyên dương *n* sao cho :

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \cdots$$

$$\cdots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(1 + x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm hai vế ta có :

$$(2n+1)(+x)^{2n} = C_{2n+1}^{1} + 2C_{2n+1}^{2}x$$

$$+3C_{2n+1}^{3}x^{2} + \cdots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $x = -2$ ta có :

$$C_{2n+1}^{1} - 2.2C_{2n+1}^{2} + 3.2^{2}C_{2n+1}^{3} - 4.2^{3}C_{2n+1}^{4}$$

$$+ \cdots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1.$$

Theo giả thiết ta có :

$$2n+1 = 2005 \Rightarrow n = 1002.$$

ĐỀ THI KHỐI B

Câu IV. 1. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x}dx.$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$

Với $x = 0$ thì $t = 2$; với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Vậy, ta có :

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x}dx = 2\int_{1}^{2} \frac{(t-1)^{2}}{t}(-dt)$$

$$= 2\int_{1}^{2}\left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^{2}}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= 2\left[(2 - 4 + \ln 2) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right] = 2\ln 2 - 1.$$

Câu IV. 2. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

Hướng dẫn giải

Có $C_3^1.C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1.C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và thứ hai thì có $C_1^1.C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Vậy, số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thoả mãn yêu cầu bài toán là :

$$C_3^1.C_{12}^4.C_8^4.C_1^1.C_4^4 = 207900.$$

ĐỀ THI KHỐI D

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x dx.$

Hướng dẫn giải

Ta có : $I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = e + \frac{\pi}{4} - 1.$$

***Câu IV.* 2.** Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \geq 3$. Theo giả thiết :

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149 \qquad (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\cdot\frac{(n+2)!}{2!\,n!} + 2\cdot\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + 2\cdot\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = 149$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -9. \end{array}\right.$$

Vì *n* nguyên dương nên n = 5. Vậy :

$$M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{\frac{6!}{2!} + 3.\frac{5!}{2!}}{6!} = \frac{3}{4}.$$

NĂM 2006

ĐỀ THI KHỐI A

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

Hướng dẫn giải

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} dx.$

Đặt $t = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow dt = 3\sin 2x dx.$

Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 4.$

Suy ra : $I = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}.$

***Câu V.a.* 2.** Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$

(n nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

• Từ giả thiết suy ra : $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ (1)

Vì $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k$, $0 \le k \le 2n+1$ nên :

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \cdots + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad (2)$$

Từ khai triển nhị thức Niutơn của $(1+1)^{2n+1}$ suy ra :

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $2^{2n} = 2^{20}$ hay $n = 10.$

• Ta có : $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^{-4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{11k-40}$.

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thoả mãn : $11k-40=26\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6=210$.

ĐỀ THI KHỐI B

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân : $I=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2}$$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$; với $x=\ln 3$ thì $t=3$; với $x=\ln 5$ thì $t=5$.

Suy ra : $I=\int_3^5\frac{dt}{(t-1)(t-2)}=\int_3^5\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|_3^5=\ln\frac{3}{2}$.

***Câu V. a.* 2.** Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 4)$. Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Số tập con k phần tử của tập hợp A bằng C_n^k. Từ giả thiết suy ra :

$C_n^4=20C_n^2\Leftrightarrow n^2-5n-234=0\Leftrightarrow n=18$ (vì $n\ge 4$).

Do $\frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k}=\frac{18-k}{k+1}>1\Leftrightarrow k<9$, nên $C_{18}^1<C_{18}^2<\cdots<C_{18}^9\Rightarrow C_{18}^9>C_{18}^{10}>\cdots>C_{18}^{18}$.

Vậy, số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi $k=9$.

ĐỀ THI KHỐI D

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân : $I=\int_0^1(x-2)e^{2x}dx$.

Hướng dẫn giải

$I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow du = dx,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$I = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}$$

Câu V. a. 2. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau :

– Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là :

$$C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120.$$

– Lớp B có 2 học sinh, các lớp C, A mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là :

$$C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$$

– Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là :

$$C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60.$$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là :

$$120 + 90 + 60 = 270.$$

Vậy, số cách chọn phải tìm là : $495 - 270 = 225$.

NĂM 2007

ĐỀ THI KHỐI A

Câu IV. **1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y=(e+1)x,\ y=\left(1+e^{x}\right)x.$$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là :

$$(e+1)x=\left(1+e^{x}\right)x \Leftrightarrow \left(e^{x}-e\right)x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là :

$$S=\int_0^1\left|xe^{x}-ex\right|dx=e\int_0^1 xdx-\int_0^1 xe^{x}dx.$$

Ta có : $e\int_0^1 xdx=\left.\frac{ex^2}{2}\right|_0^1=\frac{e}{2},\ \int_0^1 xe^{x}dx=\left.xe^{x}\right|_0^1-\int_0^1 e^{x}dx=e-\left.e^{x}\right|_0^1=1.$

Vậy $S=\frac{e}{2}-1$ (đvdt).

Câu V. a. **2.** Chứng minh rằng : $\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+\cdots+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Ta có :

$(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n},\ (1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$\Rightarrow (1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right).$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx$$

- $\int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\left.\frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (1)

- $\int_0^1\left(C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^5x^5+\cdots+C_{2n}^{2n-1}\cdot\frac{x^{2n}}{2n}\right)\Bigg|_0^1$

$$=\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5\cdots+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

ĐỀ THI KHỐI B

Câu IV. **1.** Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x\ln x$ và $y=0$ là :

$$x\ln x=0\Leftrightarrow x=1.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục hoành là :

$$V=\pi\int_1^e y^2dx=\pi\int_1^e(x\ln x)^2dx.$$

Đặt $u=\ln^2x$, $dv=x^2dx\Rightarrow du=\frac{2\ln x}{x}dx$, $v=\frac{x^3}{3}$. Ta có :

$$\int_1^e(x\ln x)^2dx=\frac{x^3}{3}\ln^2x\Bigg|_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln xdx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln xdx.$$

Đặt $u=\ln x$, $dv=x^2dx\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^3}{3}$. Ta có :

$$\int_1^e x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e=\frac{2e^3+1}{9}.$$

Vậy $V=\frac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$ (đvtt).

Câu V. a. **1.** Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn của $(2+x)^n$, biết :

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=2048$$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Ta có : $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=(3-1)^n=2^n$.

Từ giả thiết suy ra $n=11$.

Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Niutơn của $(2+x)^{11}$ là :

$$C_{11}^{10}.2^1=22.$$

ĐỀ THI KHỐI D

Câu IV. **1.** Tính tích phân : $I=\int_1^e x^3\ln^2 xdx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\ln^2 x,\ dv=x^3dx\Rightarrow du=\dfrac{2\ln x}{x}dx,\ v=\dfrac{x^4}{4}$. Ta có :

$$I=\frac{x^4}{4}.\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln xdx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln xdx.$$

Đặt $u=\ln x,\ dv=x^3dx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x},\ v=\dfrac{x^4}{4}$. Ta có :

$$\int_1^e x^3\ln xdx=\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^e=\frac{3e^4+1}{16}.$$

Vậy $I=\dfrac{5e^4-1}{32}$.

Câu V. a. **1.** Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của : $x(1-2x)^5+x^2(2+3x)^{10}$.

Hướng dẫn giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1-2x)^5$ là $(-2)^4.C_5^4$.

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3.C_{10}^3$.

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ là :

$$(-2)^4.C_5^4+3^3.C_{10}^3=3320.$$

NĂM 2008

ĐỀ THI KHỐI A

Câu IV. **1.** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx.$

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\left(1-\tan^2 x\right)\cos^2 x}dx.$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Với $x=0$ thì $t=0$; với $x=\frac{\pi}{6}$ thì $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(t^2+1\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$

$$=\left(-\frac{t^3}{3}-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

Câu V. a. **2.** Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0,a_1,\ldots,a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=4096.$ Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\Rightarrow a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2^n.$

Từ giả thiết suy ra $2^n=4096=2^{12}\Leftrightarrow n=12.$

Với mọi $k \in \{0,1,2,\dots,11\}$ ta có $a_k = 2^k C_{12}^k$, $a_{k+1} = 2^{k+1} C_{12}^{k+1}$

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2^k C_{12}^k}{2^{k+1} C_{12}^{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(12-k)} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \le 7$. Do đó $a_0 < a_1 < \dots < a_8$.

Tương tự, $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7$. Do đó $a_8 > a_9 > \dots > a_{12}$.

Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \dots, a_{12}$ là $a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$.

ĐỀ THI KHỐI B

Câu IV. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$.

Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = \sqrt{2}$.

Ta có $\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x) = (t+1)^2$.

Suy ra $I = -\frac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left.\frac{1}{t+1}\right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$.

Câu V. a. **1.** Chứng minh rằng $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$ (n, k là các số nguyên dương, $k \le n$, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k) + (k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}$.

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3.C_{10}^3$.

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ là :

$$(-2)^4.C_5^4+3^3.C_{10}^3=3320.$$

NĂM 2008

ĐỀ THI KHỐI A

***Câu IV.* 1.** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx.$

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\left(1-\tan^2 x\right)\cos^2 x}dx.$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Với $x=0$ thì $t=0$; với $x=\frac{\pi}{6}$ thì $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(t^2+1\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$

$$=\left(-\frac{t^3}{3}-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

***Câu V. a.* 2.** Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0,a_1,\ldots,a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\Rightarrow a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2^n$.

Từ giả thiết suy ra $2^n=4096=2^{12}\Leftrightarrow n=12$.

ĐỀ THI KHỐI D

Câu IV. **1.** Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\ln x$ và $dv=\frac{dx}{x^3} \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ và $v=-\frac{1}{2x^2}$.

Khi đó $I=-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{2x^3}=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^2=\frac{3-2\ln 2}{16}$.

Câu V. a. **1.** Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức $C_{2n}^1+C_{2n}^3+\ldots+C_{2n}^{2n-1}=2048$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Hướng dẫn giải

Ta có $0=(1-1)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1+\cdots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$.

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.$$

$$\Rightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}.$$

Từ giả thiết suy ra $2^{2n-1}=2048 \Leftrightarrow n=6$.

MỤC LỤC

Phần I.

GIẢI TÍCH

Phần II.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Phần III.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN
Phó Tổng biên tập HUỲNH THÔNG

Biên tập lần đầu :
TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :
ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :
MINH THƯ

Đơn vị liên doanh in và phát hành :
TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC
GIẢI TÍCH – ĐẠI SỐ TỔ HỢP
Mã số : PTK4419 - LKT

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**, Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **1100/QĐ-GD**, ngày 09/7/2009. Số ĐKKHXB: **32-2009/CXB/119-16/GD**. In xong và nộp lưu chiểu Tháng 8 – 2009.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÍ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH

Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929 Fax : 08.38227758







Giá : 39.000 đ